

## Estruturas de Dados

Pedro Hokama

Apresentação Baseada:

- Stanford Algorithms  
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V>
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

1 / 17

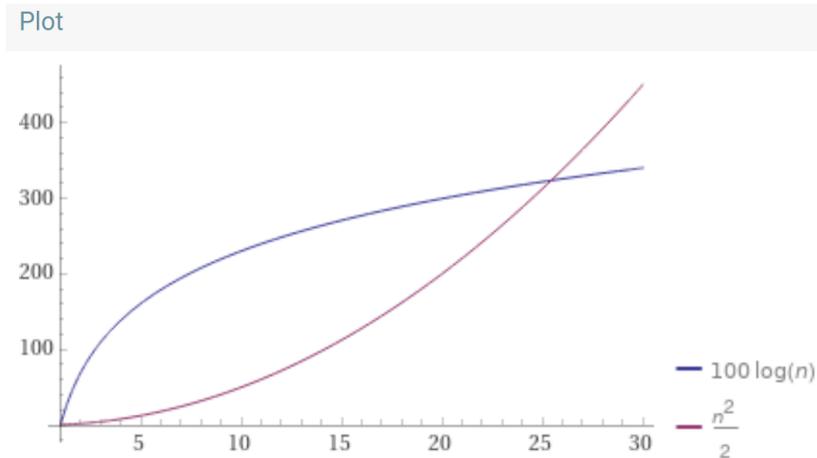
2 / 17

## Princípios da Análise de Algoritmos

- Iremos fazer uma Análise **Assintótica** dos algoritmos, o que significa que estamos interessados no comportamento deles para instâncias **grandes**.
- Isso nos permite dizer que um algoritmo é mais rápido que outro assumindo que o tamanho  $n$  da instância é suficientemente grande.
- Por exemplo, podemos dizer com segurança que um algoritmo que executa em  $20 \log n$  é mais rápido que um que executa em  $\frac{1}{2}n^2$
- Note que isso pode não ser verdade para  $n$  pequeno, mas a partir de algum  $n = n_0$  sempre será verdade.
- De fato, para  $n$  pequeno, tanto faz o algoritmo que você use. Estamos interessados em resolver problemas grandes!

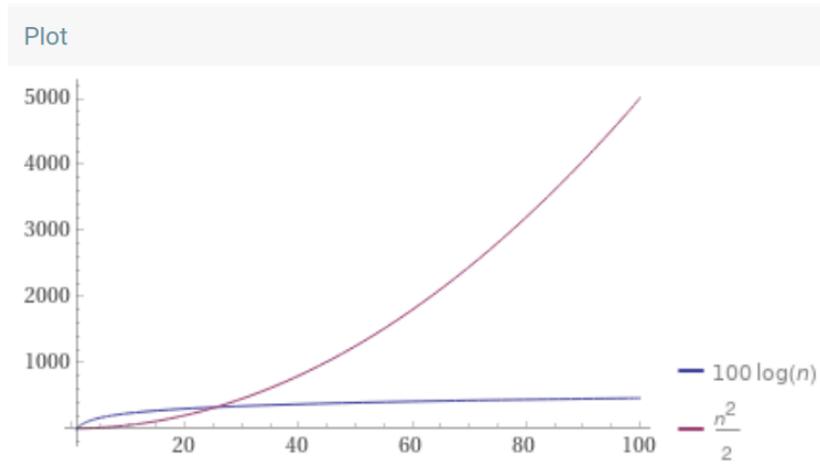
3 / 17

## Princípios da Análise de Algoritmos



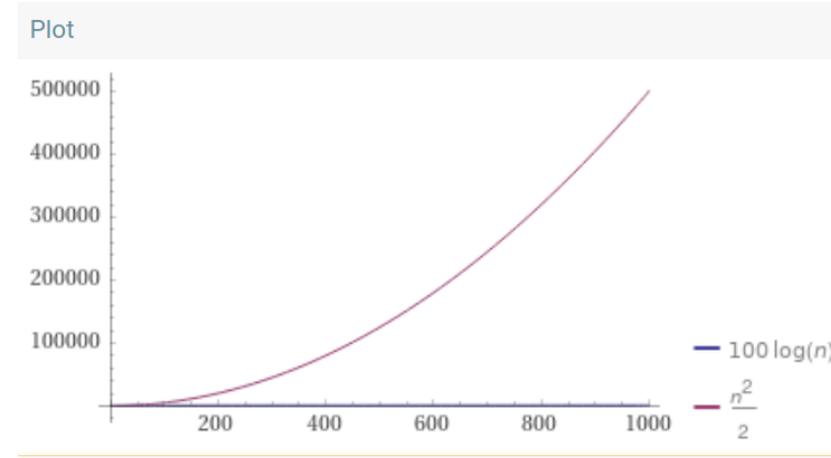
4 / 17

## Princípios da Análise de Algoritmos



5 / 17

## Princípios da Análise de Algoritmos



6 / 17

## Princípios da Análise de Algoritmos

- Você poderia imaginar que com o avanço dos hardwares, bastaria eu usar um computador melhor.
- Na verdade quanto maior o poder computacional, MAIOR é a disparidade entre algoritmos eficientes.
- Podemos pensar no tamanho do problema que podemos resolver com computadores mais potentes usando diferentes algoritmos.
- Suponha que você tem dois algoritmos para um problema.

Algoritmo A	Algoritmo B
$n$	$n^2$

- Suponha que você fez um grande investimento e comprou um computador 4 vezes mais potente. Com o algoritmo A você pode resolver um problema 4 vezes maior, enquanto com o algoritmo B você só pode resolver um problema 2 vezes maior.

7 / 17

## Princípios da Análise de Algoritmos

- Aplicaremos a Análise de Pior Caso
- Esse limite também é aplicado se um adversário tentasse atribuir números de forma a deixar o algoritmo lento.
- Essa análise é particularmente interessante por não precisar entender a aplicação do problema, padrões de entrada e ela é usualmente mais útil e mais fácil que as alternativas:
  - ▶ Análise de Caso Médio (Exige assumir alguma distribuição da entrada, ter conhecimento do domínio, mais difícil de ser feita)
  - ▶ Desempenho em *Benchmarks*
- A análise assintótica é uma ferramenta adequada pois:
  - ▶ É simples o bastante para suprimir detalhes de arquitetura/linguagem/compilador.
  - ▶ Mas é complexa o bastante para permitir a comparação entre diferentes algoritmos, especialmente em instâncias grandes.

8 / 17

## Análise Assintótica

### Ideia geral

Suprimir fatores constantes e termos de ordens inferiores.

- Por exemplo em:

$$3n^2 + 10n + 50$$

$10n + 50$  são termos de ordem inferior,  $3$  é constante então resultaria em:

$$n^2$$

- Então quando dizemos que o tempo de execução de um algoritmo é  $O(n^2)$ , ou de maneira geral quando dizemos que um algoritmo é  $O(f(n))$ . Estamos dizendo que depois de eliminar os termos de ordem inferior e constantes acabamos apenas com  $f(n)$ .

9 / 17

## Análise assintótica de funções quadráticas - termos de menor ordem

Considere a função quadrática  $3n^2 + 10n + 50$ :

$n$	$3n^2 + 10n + 50$	$3n^2$
64	12978	12288
128	50482	49152
512	791602	786432
1024	3156018	3145728
2048	12603442	12582912
4096	50372658	50331648
8192	201408562	201326592
16384	805470258	805306368
32768	3221553202	3221225472

- Como se vê,  $3n^2$  é o termo dominante quando  $n$  é grande.
- De um modo geral, **podemos nos concentrar nos termos dominantes** e esquecer os demais.

10 / 17

## Exemplos

Exemplo de um laço

### Algoritmo 1: Procura

**Entrada:** Um vetor  $A$  de tamanho  $n$  e um inteiro  $t$

**Saída:** Verdadeiro se  $A$  contém  $t$ , Falso caso contrário

```
1 para  $k$  de 1 até  $n$  faça
2   se  $A[k] == t$  então
3     devolva Verdadeiro;
4 devolva Falso;
```

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- a  $O(1)$
- b  $O(\log n)$
- c  $O(n)$
- d  $O(n^2)$

- O tempo de execução do exemplo depende por exemplo se  $t$  está ou não em  $A$ , e se  $t$  estiver na primeira posição? Estamos interessados no pior caso!
- Quantas operações estamos fazendo nas linhas 1 e 2? Uma, duas, três? Isso é constante e é suprimido pela notação  $O$ .

11 / 17

## Exemplos

Exemplo de dois laços consecutivos

### Algoritmo 2: Procura2

**Entrada:** Dois vetores  $A$  e  $B$  de tamanho  $n$  e um inteiro  $t$

**Saída:** Verdadeiro se  $A$  ou  $B$  contém  $t$ , Falso caso contrário

```
1 para  $k$  de 1 até  $n$  faça
2   se  $A[k] == t$  então devolva Verdadeiro;
3 para  $k$  de 1 até  $n$  faça
4   se  $B[k] == t$  então devolva Verdadeiro;
5 devolva Falso;
```

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- a  $O(1)$
- b  $O(\log n)$
- c  $O(n)$
- d  $O(n^2)$

- Evidentemente, nesse problema a entrada é na verdade de tamanho  $2n$ , então o algoritmo não seria  $O(2n)$ ? Essa constante é suprimida na notação  $O$ .

12 / 17

## Exemplos

Exemplo de dois laços aninhados

---

### Algoritmo 3: ProcuraComum

---

**Entrada:** Dois vetores  $A$  e  $B$  de tamanho  $n$

**Saída:** Verdadeiro se  $A$  ou  $B$  têm um número em comum, Falso caso contrário

```
1 para  $j$  de 1 até  $n$  faça
2   para  $k$  de 1 até  $n$  faça
3     se  $A[j] == B[k]$  então devolva Verdadeiro;
4 devolva Falso;
```

---

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- a  $O(1)$
- b  $O(\log n)$
- c  $O(n)$
- d  $O(n^2)$

- Pior caso ✓. Constantes ✓.
- Nesse caso se o tamanho dos vetores dobrar, o tempo de execução quadruplica!

13 / 17

## Notação O

- Big Oh, Ózão, O grande.
- Notação O é utilizada em funções definidas nos inteiros positivos.
- Seja  $T(n)$  uma função sobre  $n = 1, 2, 3, \dots$
- $T(n) : \mathbb{Z}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
- Pergunta: Quando podemos dizer que  $T(n) = O(f(n))$ ?
- Resposta: Se eventualmente, para um  $n$  suficientemente grande,  $T(n)$  é limitado superiormente por uma alguma constante vezes  $f(n)$ .

15 / 17

## Exemplos

Exemplo de dois laços aninhados

---

### Algoritmo 4: ProcuraComum

---

**Entrada:** Um vetor  $A$  de tamanho  $n$

**Saída:** Verdadeiro se  $A$  tem números duplicados, Falso caso contrário

```
1 para  $j$  de 1 até  $n$  faça
2   para  $k$  de  $j+1$  até  $n$  faça
3     se  $A[j] == A[k]$  então devolva Verdadeiro;
4 devolva Falso;
```

---

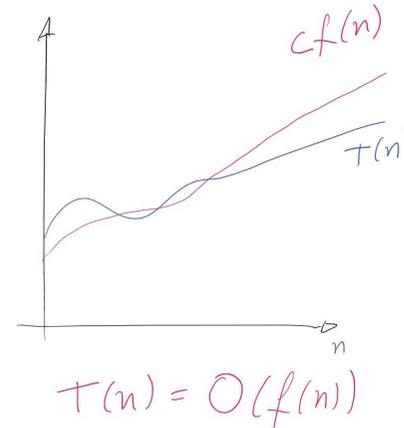
- Dessa vez, obviamente, procuramos no vetor  $A$  ao invés de  $B$ .
- Ao invés de olhar todas combinações de  $j$  e  $k$ , olhamos apenas aquelas em que  $k \geq j + 1$ .
- Isso é válido pois comparar, por exemplo, o primeiro com o terceiro elemento é a mesma coisa que comparar o terceiro com o primeiro. Então diminuimos nossas comparações pela metade!

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- a  $O(1)$
- b  $O(\log n)$
- c  $O(n)$
- d  $O(n^2)$

Exercício: É possível fazer esse algoritmo mais eficiente? Como?

14 / 17



- $T(n) = O(f(n))$  se quanto multiplicado por alguma constante  $c$  tal que  $c \cdot f(n)$  está sempre acima de  $T(n)$

16 / 17

## Exercício

- Implemente uma Busca Linear, faça a análise de complexidade
- Implemente uma Busca Binária, faça a análise de complexidade