Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest, Ronald L. Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden

Apresentação Baseada:

- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

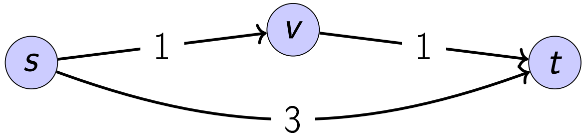
Qualquer erro é de minha responsabilidade.

	Caminho mínimo única fonte	Caminho mínimo entre todos os pares
Dijkstra	$O(m \log n)$	$O(nm \log n)$
Bellmond-Ford	$O(mn)$	$O(mn^2)$
Floyd-Warshall		$O(n^3)$

Algoritmo de Johnson

- Relembrando que podemos resolver o problema com n chamadas ao algoritmo de caminhos mínimos de única fonte:
  - Custos não negativos: $O(mn \log n)$ com o Dijkstra
  - Caso geral: $O(mn^2)$ com o Bellman-Ford
- Mas eu ainda quero usar o Dijkstra mesmo com pesos negativos. Será possível?
- O algoritmo de Johnson:
  - Faz 1 chamada ao Bellman-Ford
  - Faz n chamadas ao Dijkstra
- Portanto $O(mn) + O(nm \log n) = O(nm \log n)$

- Podemos só somar um valor em todas as arestas para tornar todos os custos positivos? Não! Suponha no grafo abaixo que **somamos 2** em todas os arcos, perceba que o menor caminha muda. Só funcionaria se todos os caminhos tivessem o mesmo número de arestas.



- Nem tudo está perdido, podemos sim usar um rebalanceamento para se livrar dos pesos negativos.

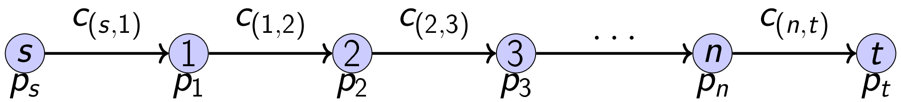
- Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado com custos c_a nos arcos, podendo ser negativos. Fixe um número real p_v para cada vértice $v \in V$.
- Para cada arco $a = (u, v)$ de A, faça $c'_a = c_a + p_u - pv$

$$\underset{p_u = -4}{u} \xrightarrow{\quad 2 \quad} \underset{p_v = -3}{v}$$

$$c'_{(u,v)} = 2 + (-4) - (-3) = 2 - 4 + 3 = 1$$

$$u \xrightarrow{\quad 1 \quad} v$$

Considere um $s - t$ caminho qualquer (renomeando os nós internos como $1, 2, \ldots, n$



Custo do caminho:

$$c_{(s,1)} + c_{(1,2)} + c_{(2,3)} + \ldots + c_{(n,t)}$$

Novo custo do caminho:

$$c_{(s,1)}+p_s-p_1+c_{(1,2)}+p_1-p_2+c_{(2,3)}+p_2-p_3+\ldots+c_{(n,t)}+p_n-p_t$$

Custo do caminho:

$$c_{(s,1)} + c_{(1,2)} + c_{(2,3)} + \ldots + c_{(n,t)}$$

Novo custo do caminho:

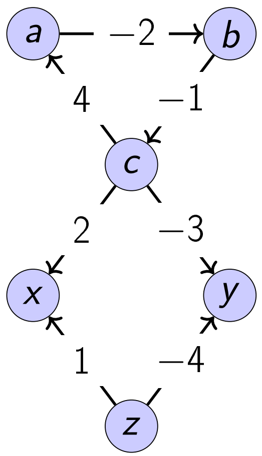
$$\begin{array}{lll}
c_{(s,1)} + p_s - p_1 + & c_{(s,1)} + p_s \cancel{-p_1} + & c_{(s,1)} + p_s + \\
c_{(1,2)} + p_1 - p_2 + & c_{(1,2)} \cancel{+p_1} \cancel{-p_2} + & c_{(1,2)} + \\
c_{(2,3)} + p_2 - p_3 + & c_{(2,3)} \cancel{+p_2} \cancel{-p_3} + & c_{(2,3)} + \\
\ldots + & \ldots + & \ldots + \\
c_{(n,t)} + p_n - p_t & c_{(n,t)} + \cancel{p_n} - p_t & c_{(n,t)} - p_t
\end{array}$$

- Se o $s - t$ caminho P tem custo L com os custos originais, qual é o custo L' de P com os custos modificados?

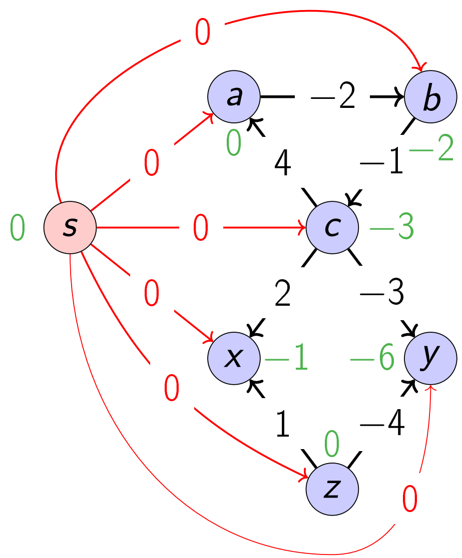
(a) L
(b) $L + p_s + P_t$
(c) $L + p_s - P_t$
(d) $L - p_s + P_t$

$$
\begin{aligned}
L' &= \sum_{a \in P} c'_a \\
&= \sum_{a=(u,v) \in P} c_a + p_u - p_v \\
&= \left(\sum_{a \in P} c_a \right) + p_s - p_t = L + p_s - p_t
\end{aligned}
$$

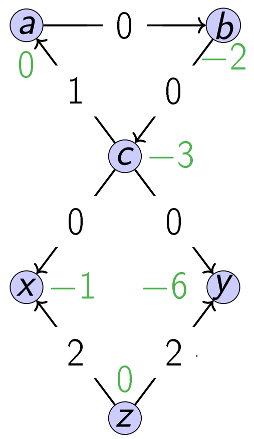
- Note que dessa forma qualquer caminho foi alterado exatamente pelo mesmo custo.
- Dessa forma os caminhos mínimos foram preservados (obviamente não o seu custo, mas é fácil de obtê-lo)
- E se encontramos valores p_v de forma que todos os arcos fiquem com custos não-negativos?
- Como encontrar esses valores? Alias, será que tais valores existem? 🤔
- Se o grafo não tiver ciclos negativos, SIM, esses valores existem!



- A ideia consiste em executar um algoritmo para o problema do caminho mínimo de única fonte.
- Um problema: É preciso alcançar todos os vértices, no grafo ao lado qualquer vértice que você escolher para ser sua fonte não vai alcançar todos os outros.
- Truque, inserir um novo vértice fictício que se liga a todos os outros por um arco de custo 0.



- Note que adicionar s e os novos arcos não cria nenhum novo caminho para qualquer $u, v \in V$.
- como existem arcos com custo negativo, nos resta executar o Bellman-Ford (o que também detecta ciclos negativos)
- Esse são exatamente os valores que procuramos. p_v é o custo do $s - t$ caminho mínimo.



- Podemos então para cada arco $a = (u, v)$ calcular o novo custo $c'_a = c_a + p_u - p_v$
- Agora todos os custos ficaram não negativos 😎 (pelo menos para esse exemplo)
- Agora não precisamos mais usar o Bellman-Ford e podemos usar o Dijkstra!

Algoritmo 1: Johnson(G)

Entrada: Um grafo caminho G

Saída: Os custos dos caminhos mínimos entre todos os pares de vértices

1 Formar G', adicionando à G um vértice s extra e um novo arco (s, v) para todo $v \in V$ com custo 0;
2 Executar o Bellman-Ford em G' com fonte s (se detectar ciclo negativo, terminar);
3 **para** $v \in V$ **faça** p_v = custo do $s - t$ caminho mínimo em G';
4 **para** $(u, v) \in A$ **faça** $c'_{uv} = c_{uv} + p_u - p_v$;
5 **para** $v \in V$ **faça** Executar o Dijkstra em G com fonte em v e os custos $\{c'_a\}$, obtendo os custos $d'(u, v)$;
6 **para** *cada par* $u, v \in V$ **faça** $d(u, v) = d'(u, v) - p_u + p_v$;
7 devolva d;

Tempo de execução:
$O(n) + O(mn) + O(m) + O(nm \log n) + O(n^2) = O(mn \log n)$

- Corretude: Como os caminhos de custo mínimo são preservados, se não houver custos negativos as execuções do Dijkstra os encontram corretamente, logo o algoritmo de Jonhson funciona.
- Resta demonstrar que de fato os custos $\{c'_a\}$ são não negativos.

- Considere um arco (u, v), por construção p_u é custo do caminho mínimo P de s a u, e p_v do caminho de s a v.

$$s \xrightarrow[P]{\cdots} u \xrightarrow{c_{uv}} v$$

- Como $P + (u, v)$ é um possível caminho para v, certamente o caminho de custo mínimo tem um valor menor ou igual a esse. Ou seja

$$\begin{aligned} p_v &\leq p_u + c_{uv} \\ 0 &\leq p_u + c_{uv} - p_v \\ c'_{uv} = p_u + c_{uv} - p_v &\geq 0 \end{aligned}$$

Tempo polinomial

- Vimos vários problemas e algoritmos eficientes para resolve-los
  - Ordenação - $O(n \log n)$
  - Multiplicação - $O(n^{1.586})$
  - Multiplicação de Matrizes - $O(n^{2.8})$
  - Busca em Grafos - $O(m + n)$
  - Encontrar Componentes fortemente conexas - $O(m + n)$
  - Caminhos Mínimos - $O(m \log n)$
  - Escalonamento Ponderado - $O(n \log n)$
  - Compressão de Texto - $O(n \log n)$
  - MST - $O(m \log n)$

- Será que qualquer problema pode sempre ser resolvido em tempo $O(n^3)$, ou $O(n^4)$?
- Ou pelo menos será que qualquer problema pode ser resolvido em tempo $O(n^k)$ para qualquer k constante? Todo problema pode ser resolvido em **tempo polinomial**?
- A resposta é: **Muito provavelmente não!**

- Quando falamos de Caminhos entre todos os pares de vértices, em grafos com ciclos de pesos negativos, se proibíssemos os ciclos o problema era bem definido, mas não podia ser resolvido de maneira eficiente.
- De fato o problema da mochila que resolvemos em $O(nW)$ também não foi resolvido em tempo polinomial no tamanho da entrada. Uma vez que para escrever W precisamos $m = \log W$ bits. Portanto o tempo de execução é $O(n2^m)$, exponencial no tamanho da entrada!

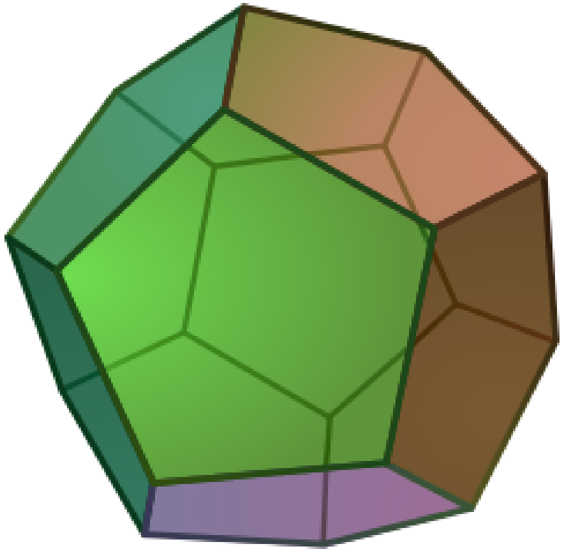
- Esses dois problemas estão entre os chamados NP-Difíceis! Para os quais ainda não se conhecem algoritmos de tempo polinomial!
- De fato até aqui (exceto pelo problema da mochila) foi selecionado um conjunto muito particular de problemas, aqueles que podem ser resolvidos em tempo polinomial. Mas **MUITOS** outros problemas práticos talvez não possam.

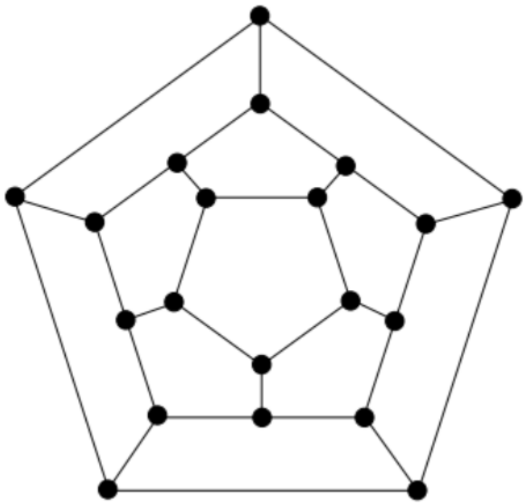
- Formalmente as classes de complexidade P, NP, NP-completo e outras, são melhor definidas sobre os problemas de decisão, para os quais a resposta é simplesmente **SIM** ou **NÃO**. Mas os problemas tem uma forte relação entre si.
  - Caminho mínimo: Dado G, um vértice s e um número k existe um caminho de s para qualquer outro vértice com custo no máximo k?
  - MST: Dado G e um inteiro k, existe uma Árvore geradora mínima de custo no máximo k?
  - Compressão de Texto: Dado um texto T e um número k, existe uma compressão desse texto com no máximo k bits?

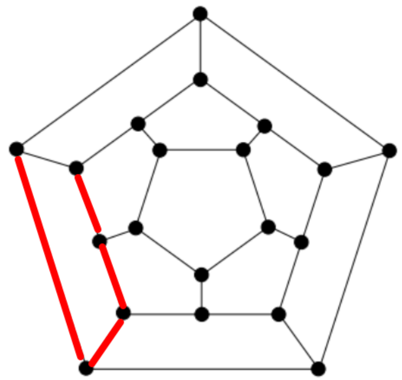
- O problemas que podem ser decididos em tempo polinomial formam a classe de complexidade

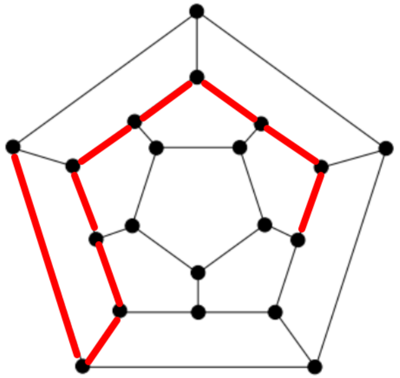
$$P$$

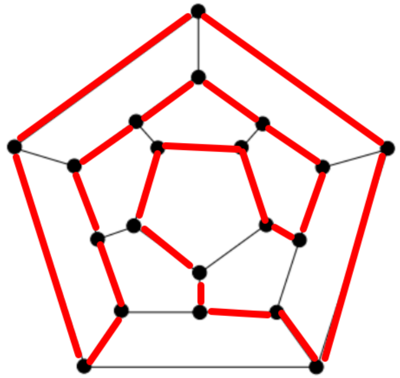
Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

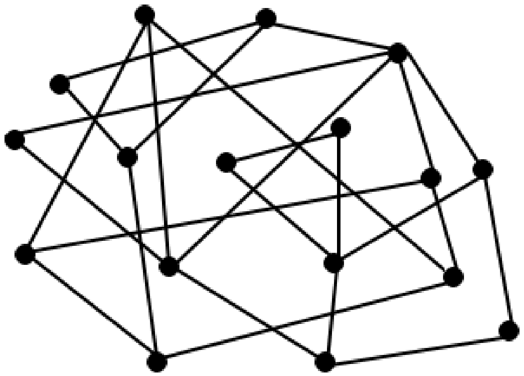


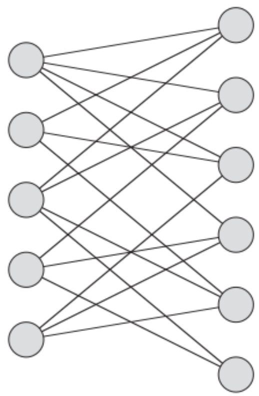












- Um **ciclo hamiltoniano** de um grafo G é um ciclo que passa por todos os vértices exatamente uma vez.

Problema do Ciclo Hamiltoniano

Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$. Decidir se G possui um ciclo hamiltoniano.

- Esse problema é NP-Difícil e não se conhece nenhum algoritmo de tempo polinomial para resolve-lo!

Mas são tão parecidos...

Dado um grafo orientado $G = (V, E)$,

encontrar o caminho mais **curto** entre dois vértices é fácil, $O(nm)$.

Encontrar o caminho mais **longo**, é NP-Difícil.

Mas são tão parecidos...

Dado um grafo orientado $G(V, E)$,

decidir se existe um ciclo que passe por todas as **arestas** exatamente uma vez é fácil, $O(m)$.

Decidir se existe um ciclo que passe por todos os **vértices** exatamente uma vez é NP-Difícil.

Mas são tão parecidos...

Uma formula booleana, contêm variáveis cujo valor são 0 ou 1, conectivos $\wedge$ (e), $\vee$ (ou) e $\neg$ (negação); e parenteses.

$$(x_1 \wedge x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \vee x_4$$

Existem uma atribuição das variáveis que torne a formula verdadeira?

Mas são tão parecidos...

Decidir se uma formula em **forma normal 2-conjuntiva** é satisfazível, por exemplo:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

é fácil.

Decidir se uma formula em **forma normal 3-conjuntiva** é satisfazível, é NP-Difícil.

O nome desse problema é **3-CNF-SAT**

P, NP e NP-Completo

- Os problemas da Classe **P** são aqueles que podem ser resolvidos em tempo polinomial
- Os problemas da Classe **NP** que conseguem decidir SIM em tempo polinomial para uma instância x se um certificado C_x for fornecido.

Classe NP

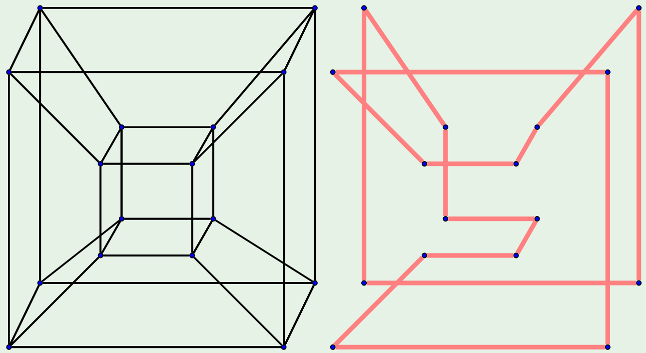
2-CNF-SAT

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$

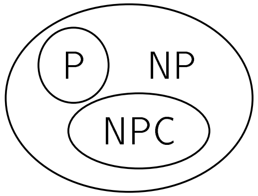
Classe NP

Ciclo Hamiltoniano



Classe NP

- Obviamente todo problema em P está em NP, basta descartar o certificado e decidir baseado apenas na instância.
- O certificado tem que ter tamanho polinomial, senão eu gastaria um tempo exponencial só para lê-lo.



Reduções

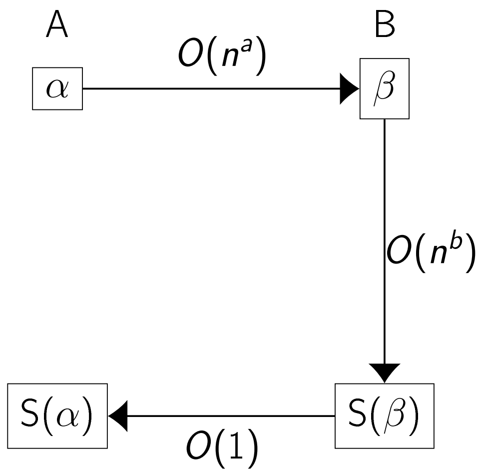
Suponha que temos um problema de decisão A que queremos resolver em tempo polinomial.

Agora suponha que temos outro problema de decisão B que já sabemos que pode ser resolvido em tempo polinomial.

Finalmente, suponha que conhecemos um procedimento que transforma uma instância α do problema A, em uma instância β no problema B. Tal que:

- A transformação leva tempo polinomial
- A resposta de α para A é a mesma da instância β para B.

Reduções



Reduções

- Temos então um algoritmo polinomial para resolver o problema A.

- Agora suponha que temos um problema A que sabemos que é difícil de resolver.
- e suponha que conseguimos uma redução de A para B que seja muito rápida.
- O que podemos afirmar sobre B?

Problema muito difícil