

Uma Introdução à Programação por Restrições

Pedro Henrique Del Bianco Hokama

1 Programação por Restrições

2 Como funciona?

3 Histórico

4 Exemplos

1 / 56

2 / 56

O que é?

É um paradigma de programação que define variáveis e relações entre essas variáveis através de restrições.

O usuário define quais as características que uma solução deve satisfazer.

“O que resolver” vs “Como resolver”

3 / 56

Problema de Satisfação de Restrições

No CSP (Constraint Satisfaction Problem) temos:

- Um conjunto de variáveis $X = \{x_1, \dots, x_n\}$;
- Um conjunto finito D_i para cada variável x_i , com todos os valores que podem ser atribuídos a variável x_i ;
- Um conjunto de restrições entre as variáveis que devem ser satisfeitas.

4 / 56

Problema de Satisfação de Restrições

Podemos estar interessados em:

- Encontrar qualquer solução;
- Encontrar todas as soluções;
- Provar que não existe nenhuma solução;
- Dado uma função objetivo, encontrar uma solução boa ou ótima.

Sudoku

	2	5	1	9	
8		2	3		6
	3		6		7
		1		6	
5	4				1 9
		2		7	
	9		3		8
2		8	4		7
	1	9	7	6	

5 / 56

6 / 56

Sudoku

	2	5	1	9	$x_{i,j}$
8		2	3		6
	3		6		7
		1		6	
5	4				1 9
		2		7	
	9		3		8
2		8	4		7
	1	9	7	6	

6 / 56

Sudoku

	2	5	1	9	$x_{i,j} \in \{1, 2, \dots, 9\}$
8		2	3		6
	3		6		7
		1		6	
5	4				1 9
		2		7	
	9		3		8
2		8	4		7
	1	9	7	6	

6 / 56

Sudoku

	2	5	1	9	
8		2	3		6
3		6		7	
	1			6	
5	4				1 9
	2			7	
9		3			8
2		8	4		7
1	9	7		6	

$x_{i,j} \in \{1, 2, \dots, 9\}$

Sudoku

	2	5	1	9	
8		2	3		6
3		6		7	
	1			6	
5	4				1 9
	2			7	
9		3			8
2		8	4		7
1	9	7		6	

$x_{i,j} \in \{1, 2, \dots, 9\}$

Sudoku

	2	5	1	9	
8		2	3		6
3		6		7	
	1			6	
5	4				1 9
	2			7	
9		3			8
2		8	4		7
1	9	7		6	

$x_{i,j} \in \{1, 2, \dots, 9\}$

- Inteligência Artificial
- Visão Computacional
- Pesquisa Operacional
- Sistemas Especialistas
- etc..

Programação por Restrições

Programação por Restrições

Como utilizar programação por restrições?

- Descrever o Problema
- Modelar o Problema
 - Variáveis
 - Domínios
 - Restrições
- Resolver o Problema

Exemplo:

8 / 56

9 / 56

Descrever o problema

Quais os valores de x e y , onde x é um inteiro entre 5 e 12, e y é um inteiro entre 2 e 17 tal que $x + y = 17$ e $x - y = 5$.

Modelar

Quais os valores de x e y , onde x é um inteiro entre 5 e 12, e y é um inteiro entre 2 e 17 tal que $x + y = 17$ e $x - y = 5$.

Variáveis:

- x e y

Domínios:

- Domínio de x é $[5 \dots 12]$
- Domínio de y é $[2 \dots 17]$

Restrições:

- $x + y = 17$
- $x - y = 5$

10 / 56

11 / 56

Resolver

- Explorar o espaço de busca para encontrar uma solução. (Todas as combinações de valores)

Técnicas para encontrar uma solução:

- Busca construtiva (Backtracking)
- Propagação
 - ▶ Propagação inicial
 - ▶ Propagação durante a busca

12 / 56

Propagação Inicial

Domínio antes da propagação:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17]$$

- $x + y = 17$

13 / 56

Propagação Inicial

Domínio antes da propagação:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17]$$

13 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17]$$

- $x + y = 17$

14 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17]$$

- $x + y = 17$
 $y = 17 - x, x \geq 5$
portanto $y \leq 17 - 5$

14 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17]$$

- $x + y = 17$
 $y = 17 - x, x \geq 5$
portanto $y \leq 17 - 5$
 $y \leq 12$

14 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ ~~13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17~~]$$

- $x + y = 17$
 $y = 17 - x, x \geq 5$
portanto $y \leq 17 - 5$
 $y \leq 12$

15 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

- $x + y = 17$

16 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

- $x + y = 17$
 $y = 17 - x, x \leq 12$
portanto $y \geq 17 - 12$

16 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

- $x + y = 17$
 $y = 17 - x, x \leq 12$
portanto $y \geq 17 - 12$
 $y \geq 5$

16 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

- $x + y = 17$
 $y = 17 - x, x \leq 12$
portanto $y \geq 17 - 12$
 $y \geq 5$

17 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

18 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

- $x - y = 5$
 $x = 5 + y, y \geq 5$
portanto $x \geq 5 + 5$

18 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

- $x - y = 5$
 $x = 5 + y, y \geq 5$
portanto $x \geq 5 + 5$
 $x \geq 10$

18 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [\del{5} \ \del{6} \ \del{7} \ \del{8} \ \del{9} \ 10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

- $x - y = 5$
 $x = 5 + y, y \geq 5$
portanto $x \geq 5 + 5$
 $x \geq 10$

19 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

- $x + y = 17$

20 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

- $x + y = 17$
 $y = 17 - x, x \geq 10$
portanto $y \leq 17 - 10$

20 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]$$

- $x + y = 17$
 $y = 17 - x, x \geq 10$
portanto $y \leq 17 - 10$
 $y \leq 7$

20 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7 \ ~~8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12~~]$$

- $x + y = 17$
 $y = 17 - x, x \geq 10$
portanto $y \leq 17 - 10$
 $y \leq 7$

21 / 56

Propagação Inicial

Domínio:

$$D(x) = [10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7]$$

22 / 56

Busca Construtiva

Busca Construtiva

Domínio:

$$D(x) = [10 \ 11 \ 12]$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7]$$

23 / 56

23 / 56

Busca Construtiva

Atribuição:

$$x = 10$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7]$$

Propagação Durante a Busca:

- $x + y = 17$

24 / 56

Busca Construtiva

Domínio local:

$$x = 10$$

$$D(y) = [\del{5} \ 6 \ 7]$$

Propagação Durante a Busca:

- $x + y = 17$

25 / 56

Propagação Durante a Busca

Domínio local:

$$x = 10$$

$$D(y) = [7]$$

26 / 56

Propagação Durante a Busca

Domínio local:

$$x = 10$$

$$D(y) = [7]$$

- $x - y = 5$

26 / 56

Propagação Durante a Busca

Domínio local:

$$x = 10$$

$$D(y) = [] \text{ falha!}$$

- $x - y = 5$

27 / 56

Backtracking

Domínio local:

$$x = 11$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7]$$

28 / 56

Propagação Durante a Busca

Domínio local:

$$x = 11$$

$$D(y) = [5 \ 6 \ 7]$$

Propagação Durante a Busca:

- $x + y = 17$

29 / 56

Propagação Durante a Busca

Domínio local:

$$x = 11$$

$$D(y) = [\cancel{5} \ 6 \ \cancel{7}]$$

Propagação Durante a Busca:

- $x + y = 17$

30 / 56

Propagação Durante a Busca

Domínio local:

$$x = 11$$

$$D(y) = [6]$$

Propagação Durante a Busca:

- $x - y = 5$

31 / 56

Propagação Durante a Busca

Domínio local:

$$x = 11$$

$$D(y) = [6]$$

Propagação Durante a Busca:

- $x - y = 5$ não é violado

32 / 56

Solução

$$x = 11$$

$$y = 6$$

Está no domínio, não viola nenhuma restrição, portanto é uma solução.

33 / 56

Histórico

34 / 56

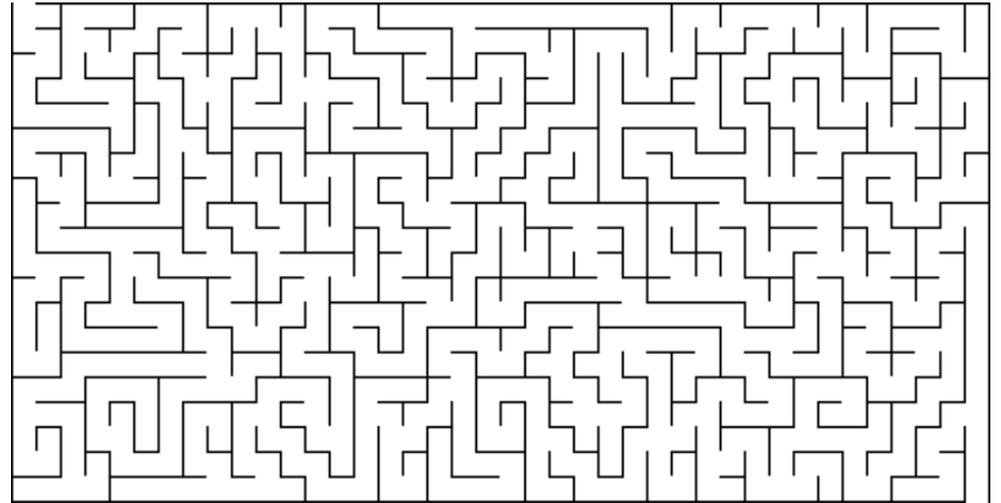
Histórico

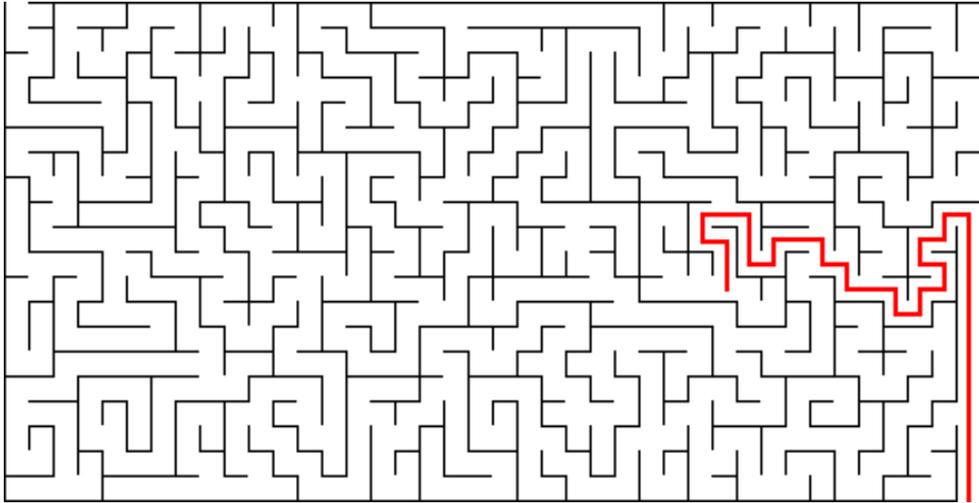
- Na grécia antiga...



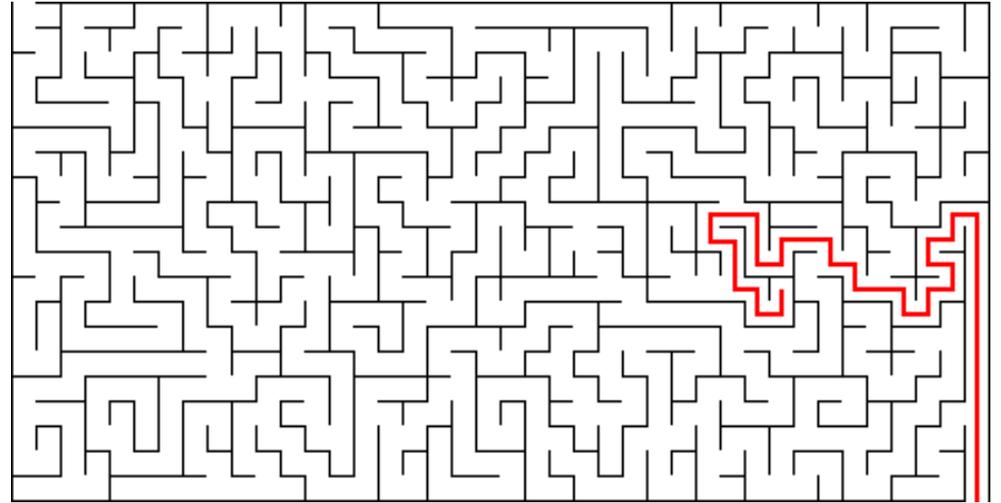
34 / 56

35 / 56

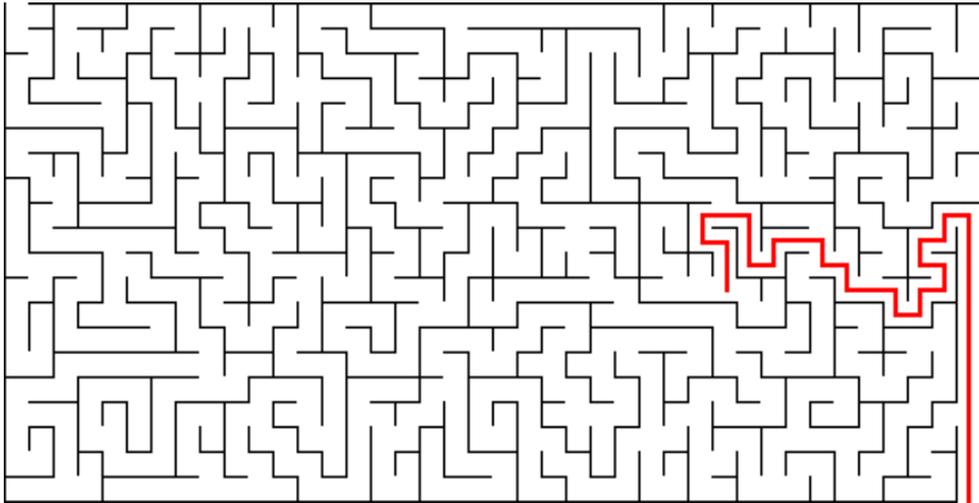




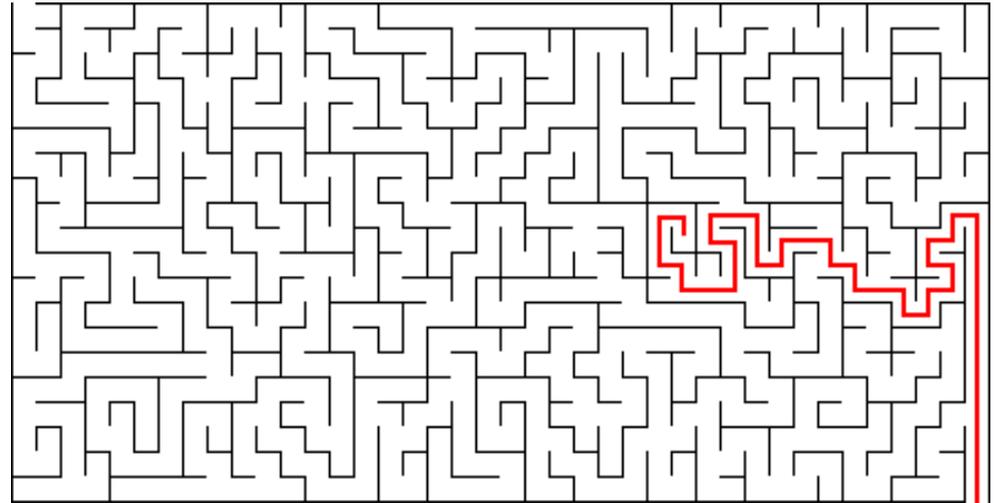
35 / 56



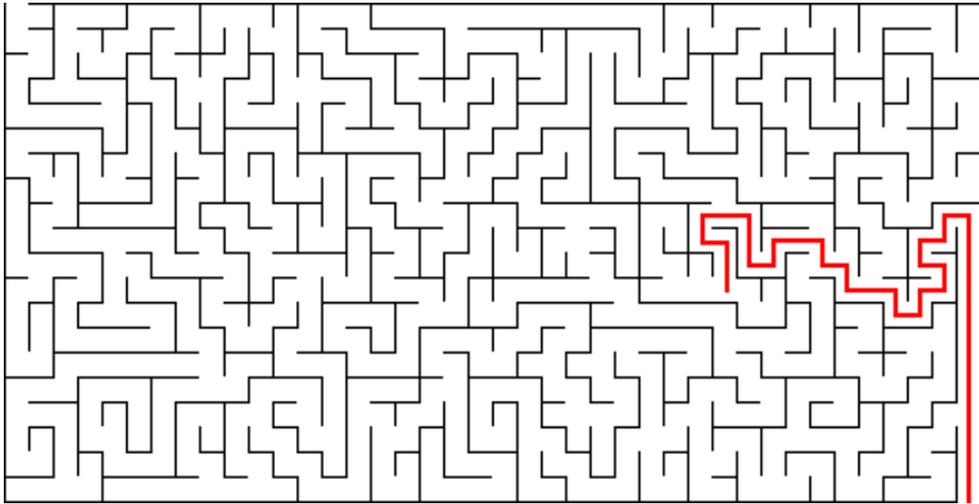
35 / 56



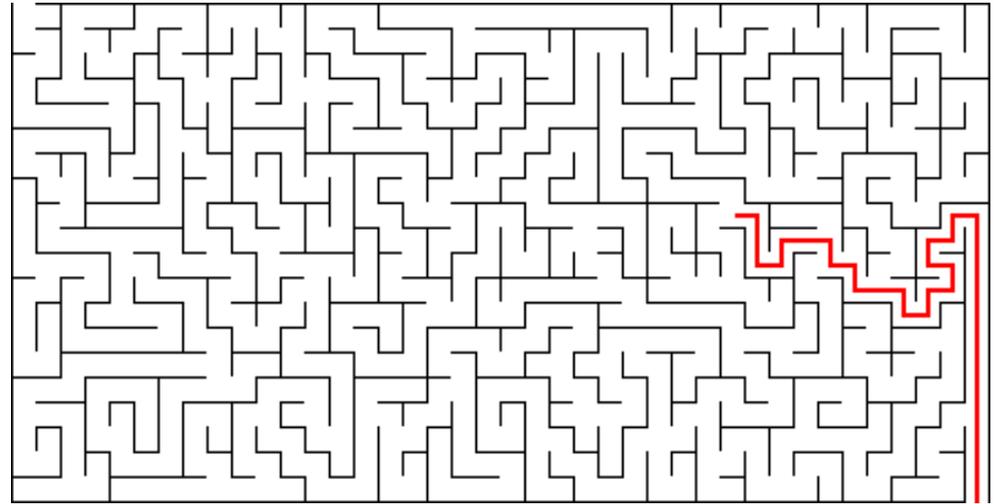
35 / 56



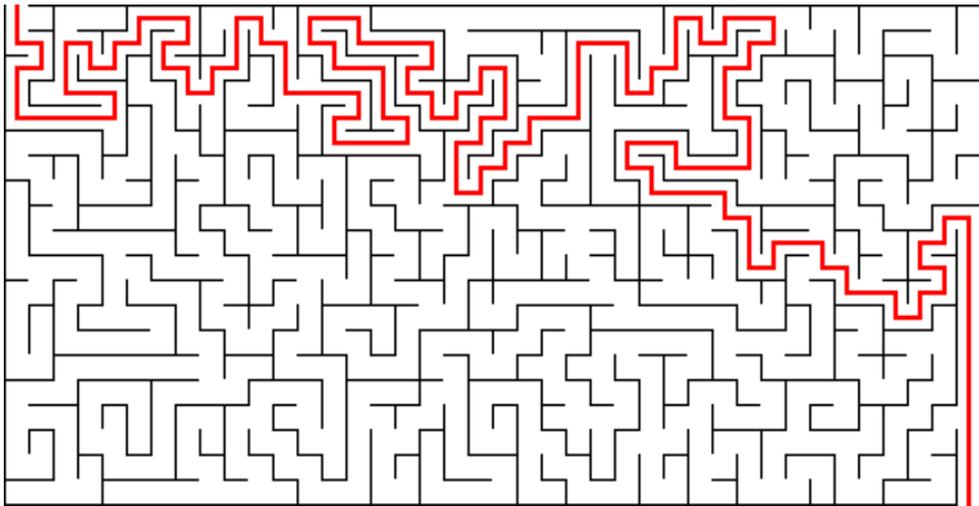
35 / 56



35 / 56



35 / 56



35 / 56



35 / 56

Epitáfio de Diofanto - Século II

Epitáfio de Diofanto - Século II

"Deus deu à ele um sexto de sua vida na infância, Um duodécimo como adolescente enquanto cresciam bigodes; E ainda um sétimo antes de iniciar o casamento; Em cinco anos chegou um vigoroso filho. Ah! Querida criança do mestre e sábio, Depois de alcançar metade da idade que viveu seu pai, o destino frio o levou. Após consolar-se por quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida."

36 / 56

36 / 56

Epitáfio de Diofanto - Século II

"Deus deu à ele um sexto de sua vida na infância, Um duodécimo como adolescente enquanto cresciam bigodes; E ainda um sétimo antes de iniciar o casamento; Em cinco anos chegou um vigoroso filho. Ah! Querida criança do mestre e sábio, Depois de alcançar metade da idade que viveu seu pai, o destino frio o levou. Após consolar-se por quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida."

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

36 / 56

Epitáfio de Diofanto - Século II

"Deus deu à ele um sexto de sua vida na infância, Um duodécimo como adolescente enquanto cresciam bigodes; E ainda um sétimo antes de iniciar o casamento; Em cinco anos chegou um vigoroso filho. Ah! Querida criança do mestre e sábio, Depois de alcançar metade da idade que viveu seu pai, o destino frio o levou. Após consolar-se por quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida."

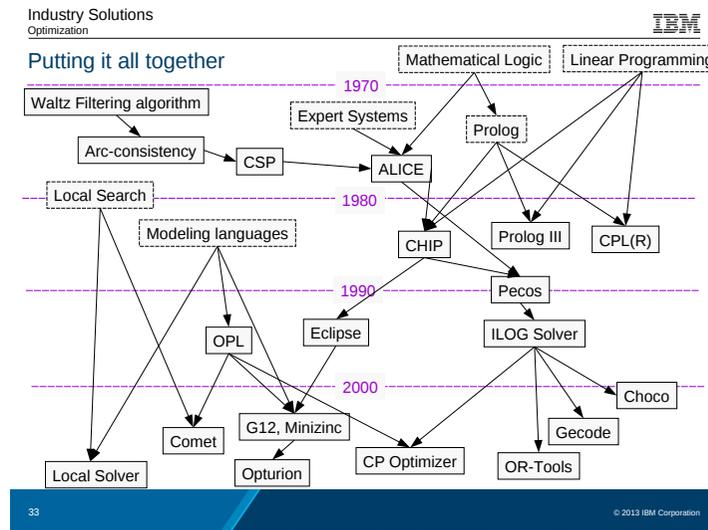
$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

$$x = 84$$

36 / 56

Histórico

- 1956 - Início da Inteligência Artificial (McCarthy no Dartmouth workshop)
- 1963 - Início do CP (Sutherland em sua tese de doutorado)
- 1965 - Primeiros algoritmos de backtracking



37 / 56

Resolvedores

- CP Optimizer - IBM
- Choco solver (biblioteca Java)
- Gecode (biblioteca C++)
- OR-Tools - Google
- ...

Operadores e Restrições - OR-Tools

- Variáveis: Booleanas, Intervalo (de duração fixa ou não), Inteira.
- Operadores Matemáticos
+ - * min max log abs ...
- Operadores Lógicos
and or ==> == ...
- Especializadas
AllDifferent, AllDifferentExcept, AllowedAssignments, AtMost, IndexOf, Element, StartAfter, StartBefore, EndsAfter, ...

39 / 56

40 / 56

OR-Tool - google

Problema: definir valores para os dígitos c , p , i , s , f , u e n , tal que essa soma seja verdadeira:

$$\begin{array}{r} c \ p \\ + \ i \ s \\ \hline f \ u \ n \end{array}$$

Todos os dígitos devem ser diferentes, e $f \neq 0$.

```
CpModelBuilder cp_model;

// Define decision variables.
Domain digit(0, 9);
Domain digit_sem_zero(1, 9);

IntVar c = cp_model.NewIntVar(digit).WithName("C");
IntVar p = cp_model.NewIntVar(digit).WithName("P");
IntVar i = cp_model.NewIntVar(digit).WithName("I");
IntVar s = cp_model.NewIntVar(digit).WithName("S");
IntVar f = cp_model.NewIntVar(digit_sem_zero).WithName("F");
IntVar u = cp_model.NewIntVar(digit).WithName("U");
IntVar n = cp_model.NewIntVar(digit).WithName("N");
// [END variables]

// [START constraints]
cp_model.AddAllDifferent({c, p, i, s, f, u, n});
cp_model.AddEquality(
    LinearExpr::ScalProd({c, p, i, s},
                        {10, 1, 10, 1}),
    LinearExpr::ScalProd({f, u, n},
                        {100, 10, 1}));
```

41 / 56

```
Model model;

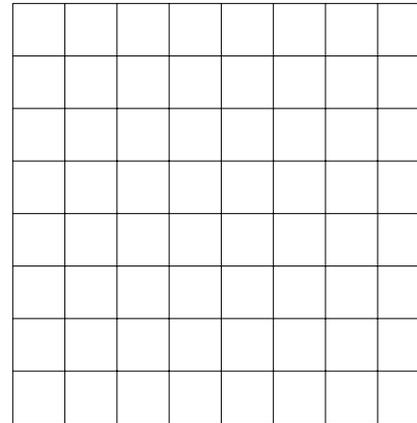
const CpSolverResponse response = SolveCpModel(cp_model.Build(), &model);
std::cout << " C=" << SolutionIntegerValue(response, c) << " "
  << "P=" << SolutionIntegerValue(response, p) << " " << std::endl
  << " I=" << SolutionIntegerValue(response, i) << " "
  << "S=" << SolutionIntegerValue(response, s) << " " << std::endl
  << "F=" << SolutionIntegerValue(response, f) << " "
  << "U=" << SolutionIntegerValue(response, u) << " "
  << "N=" << SolutionIntegerValue(response, n) << std::endl;
```

make run SOURCE=pasta/cpisfun.cpp

```
C=2 P=3
I=8 S=4
F=1 U=0 N=7
```

Problema das 8 rainhas

Problema das 8 rainhas

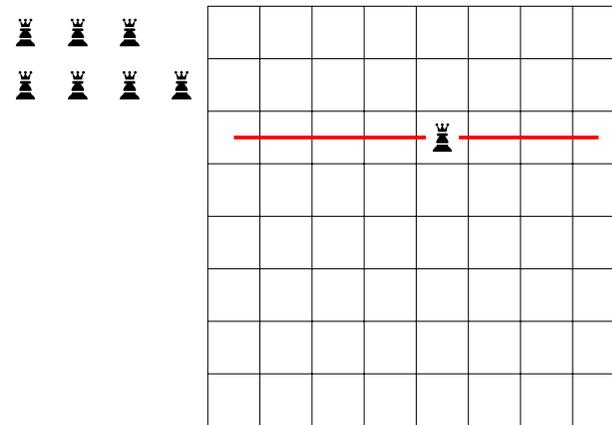
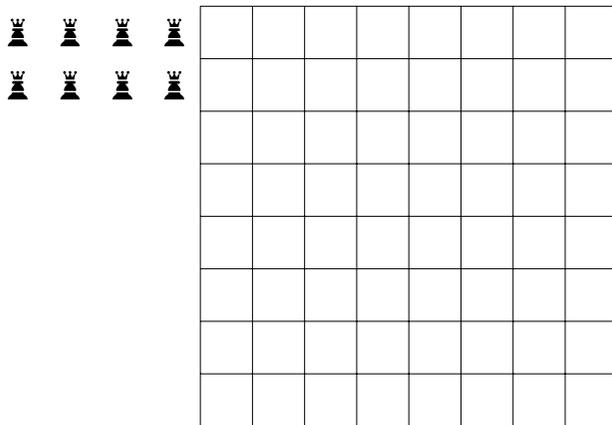


45 / 56

45 / 56

Problema das 8 rainhas

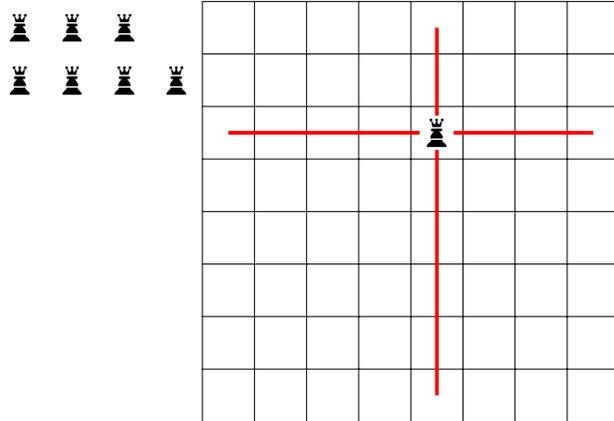
Problema das 8 rainhas



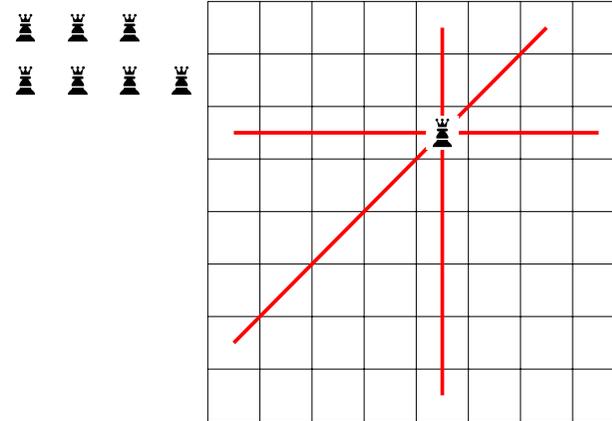
45 / 56

45 / 56

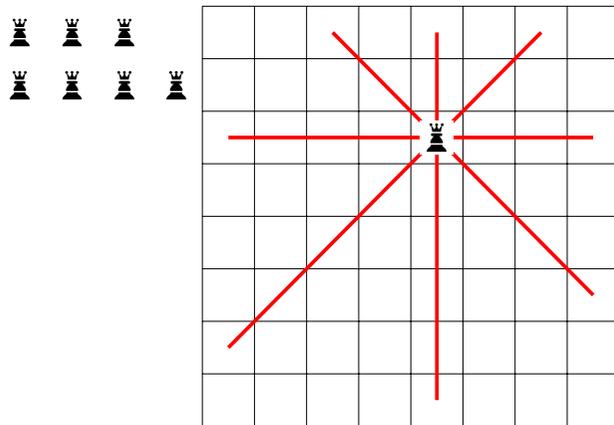
Problema das 8 rainhas



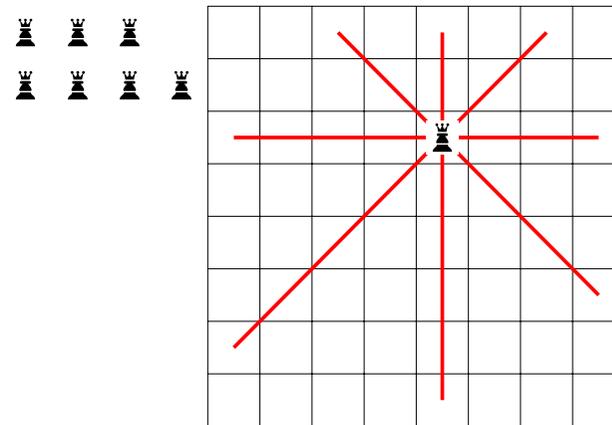
Problema das 8 rainhas



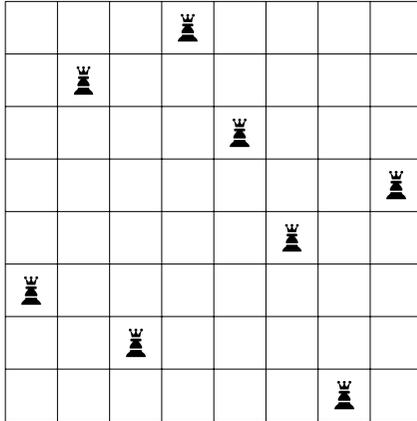
Problema das 8 rainhas



Problema das 8 rainhas



Problema das 8 rainhas



```
from ortools.constraint_solver import pywrapcp
solver = pywrapcp.Solver("n-queens")
```

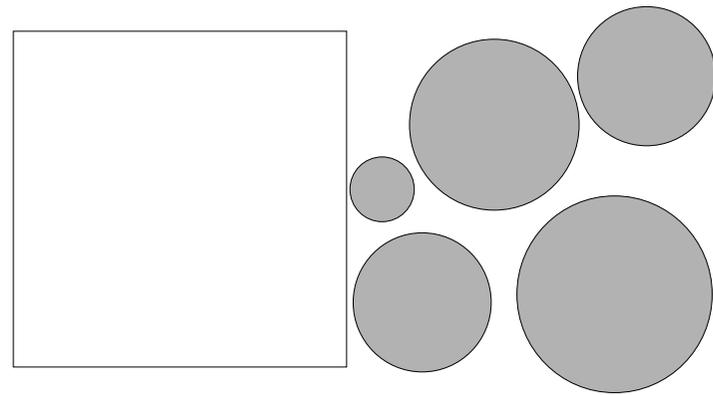
45 / 56

```
from ortools.constraint_solver import pywrapcp
solver = pywrapcp.Solver("n-queens")
n=8
q = [solver.IntVar(0, n - 1, "q%i" % i) for i in range(n)]
```

```
from ortools.constraint_solver import pywrapcp
solver = pywrapcp.Solver("n-queens")
n=8
q = [solver.IntVar(0, n - 1, "q%i" % i) for i in range(n)]
solver.Add(solver.AllDifferent(q))
```

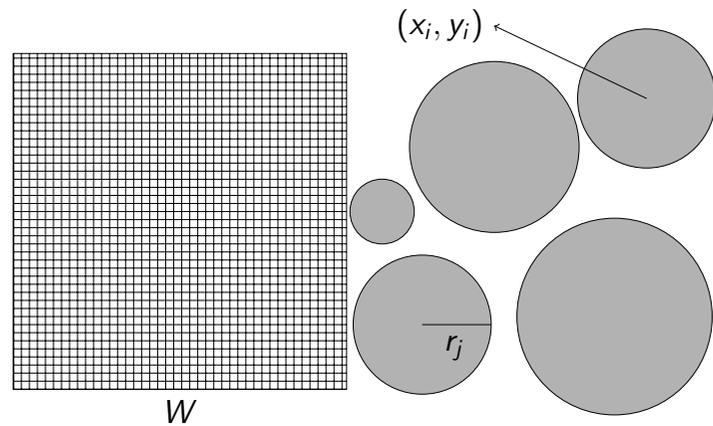
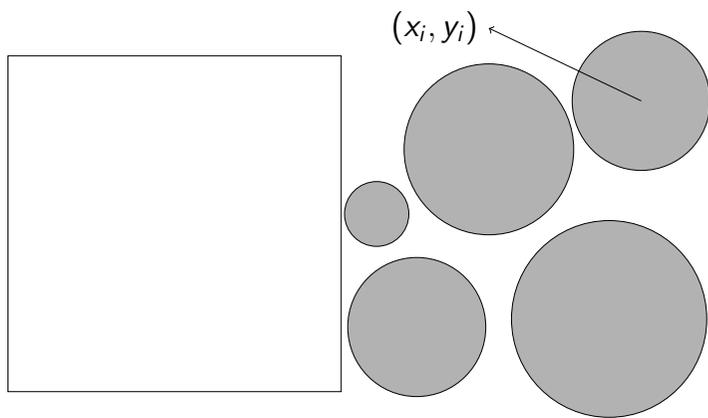

Problema de Empacotamento de Círculos

Problema de Empacotamento de Círculos



Modelo em CP - Variáveis

Modelo em CP - Domínio



Modelo em CP - Domínio

- Variáveis x_i, y_i indicando onde um item i será empacotado.
- $Dom(x_i) = [r_i, \dots, W - r_i]$
- $Dom(y_i) = [r_i, \dots, W - r_i]$
- Para cada par de itens i, j : $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2$.

```
from ortools.constraint_solver import pywrapcp
solver = pywrapcp.Solver("circle-packing")

W=4157
n=5
r = [1218, 1058, 861, 861, 401]
```

51 / 56

```
from ortools.constraint_solver import pywrapcp
solver = pywrapcp.Solver("circle-packing")
```

```
W=4157
n=5
r = [1218, 1058, 861, 861, 401]
```

```
x = [solver.IntVar(r[i], W - r[i], "x%i" % i) for i in range(n)]
y = [solver.IntVar(r[i], W - r[i], "y%i" % i) for i in range(n)]
```

```
from ortools.constraint_solver import pywrapcp
solver = pywrapcp.Solver("circle-packing")
```

```
W=4157
n=5
r = [1218, 1058, 861, 861, 401]
```

```
x = [solver.IntVar(r[i], W - r[i], "x%i" % i) for i in range(n)]
y = [solver.IntVar(r[i], W - r[i], "y%i" % i) for i in range(n)]
```

```
for i in range(n):
    for j in range(i):
        solver.Add((x[i] - x[j])*(x[i] - x[j])
                    + (y[i] - y[j])*(y[i] - y[j])
                    >= (r[i] + r[j])*(r[i] + r[j]))
```

```

from ortools.constraint_solver import pywrapcp

solver = pywrapcp.Solver("circle_packing")

W=4157
n=5
r = [1218, 1058, 861, 861, 401]

x = [solver.IntVar(r[i], W - r[i], "x%i" % i) for i in range(n)]
y = [solver.IntVar(r[i], W - r[i], "y%i" % i) for i in range(n)]

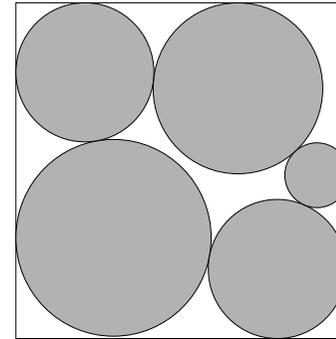
for i in range(n):
    for j in range(i):
        solver.Add((x[i] - x[j])*(x[i] - x[j])
                    + (y[i] - y[j])*(y[i] - y[j])
                    >= (r[i] + r[j])*(r[i] + r[j]))

db = solver.Phase(x + y,
                  solver.INT_VAR_DEFAULT,
                  solver.INT_VALUE_DEFAULT)
solver.NewSearch(db)

solver.NextSolution()
print([(x[i], y[i]) for i in range(n)])
solver.EndSearch()

```

Solução



53 / 56

Conclusões

- Programação por Restrições em alguns casos é uma alternativa para programação linear inteira.
- É eficiente para vários problemas, em particular para problemas de alocação e escalonamento.
- É simples de implementar.

Referências

- OR-Tools, <https://developers.google.com/optimization/>
- Hokama, P., Miyazawa, F. K., & Schouery, R. C. (2016). A bounded space algorithm for online circle packing. *Information Processing Letters*, 116(5), 337-342.
- Hokama, P. H. D. B. (2011). O problema do caixeiro viajante com restrições de empacotamento tridimensional.
- Rossi, F., Van Beek, P., & Walsh, T. (Eds.). (2006). *Handbook of constraint programming*. Elsevier.
- Barták, R. (2010). *History of Constraint Programming*. Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science.
- Jean-Francois Puget (2014) *Constraint Programming History*. https://www.ibm.com/developerworks/community/blogs/jfp/entry/constraint_programming_history?lang=en

54 / 56

55 / 56

Obrigado!

Pedro Henrique Del Bianco Hokama hokama@unifei.edu.br