# Algoritmos

Pedro Hokama



## Fontes


- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
- Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
- Stanford Algorithms
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420


Qualquer erro é de minha responsabilidade.



## O Problema do Ciclo Hamiltoniano

- Definição: Um **ciclo hamiltoniano** de um grafo é um circuito que passa exatamente uma vez por todos os vértices.

**Problema do Ciclo Hamiltoniano - HAM-CYCLE**

Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, decidir se $G$ tem um ciclo hamiltoniano.

**Teorema**

*HAM-CYCLE é NP-completo*

**Lema**

*HAM-CYCLE* $\in$ *NP*

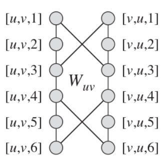
Prova: Exercício



**Lema**

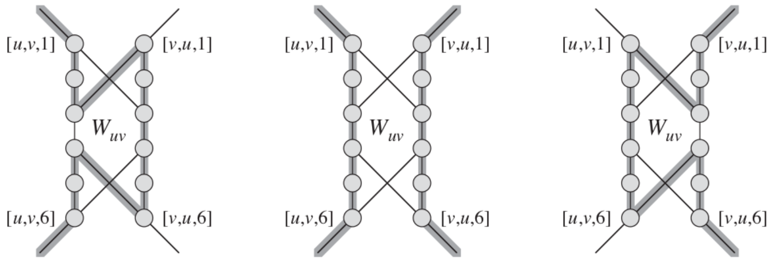
*HAM-CYCLE* $\in$ *NP-Difícil*

- Mostraremos que VERTEX-COVER $\leq_p$ HAM-CYCLE.
- Dado um grafo não dirigido $G = (V, E)$ e um inteiro $k$, construiremos um grafo não dirigido $G' = (V', E')$ que tem um ciclo hamiltoniano, se e somente se, $G$ tem uma cobertura por vértices de tamanho $k$.
- A construção de $G'$ se baseia em uma **engenhoca** (*widget*) que é um pedaço de um grafo que impõe certas propriedades.




- Para cada aresta $(u, v) \in E$ o nosso grafo $G'$ conterá uma cópia da engenhoca. Que denotaremos por $W_{uv}$.
- Cada vértice $W_{uv}$ tem um nome e ao total ele tem 14 arestas.
- Para a engenhoca funcionar como queremos, ela vai se conectar ao resto do grafo apenas pelos vértices $[u, v, 1], [u, v, 6], [v, u, 1]$ e $[v, u, 6]$

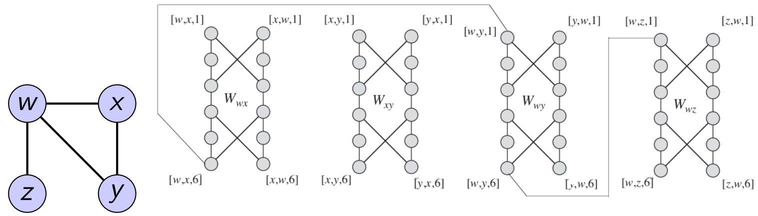
- Só existem três formas de um caminho entrar na engenhoca, passar por todos os vértices e sair.




- Em particular é impossível construir dois caminhos disjuntos nos vértices, um que ligue $[u, v, 1]$ a $[v, u, 6]$ e outro que ligue $[v, u, 1]$ a $[u, v, 6]$.
- Além das engenhocas serão adicionados $k$ vértices seletores $s_1, s_2, \dots, s_k$. Usaremos as arestas que incidem nesses vértices para selecionar os $k$ vértices que formarão a cobertura por vértices em $G$.



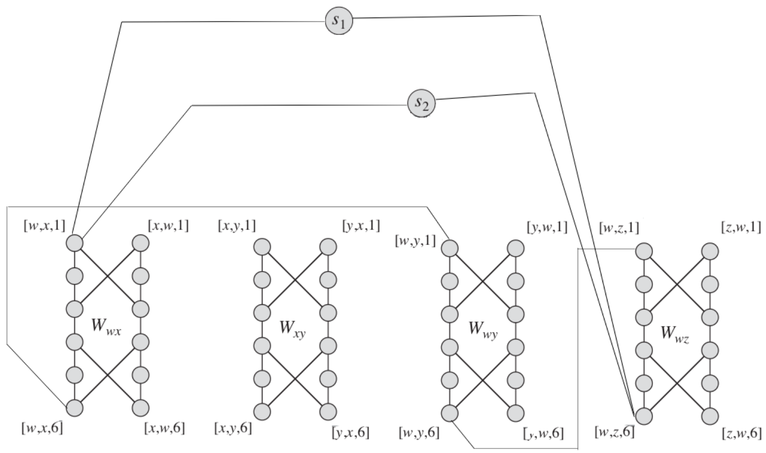
- Posteriormente para cada vértice $u \in V$ adicionamos arestas que criam um caminho em $G'$ que passam por todas as engenhocas que correspondem a arestas incidentes a $u$.
- Ordenamos arbitrariamente os vértices adjacentes a $u$. E dada a ordenação $(v_1, \dots, v_{grau(u)})$, conectamos $[u, v_i, 6]$ com $[u, v_{i+1}, 1]$.
- No exemplo a seguir, $w$ é vizinho de $x$, $y$ e $z$ (considerando essa ordem).




- A intuição é que se escolhermos um vértice $u$ para a nossa cobertura, podemos fazer um caminho que passa por todas as engenhocas que correspondem as arestas adjacentes a $u$.

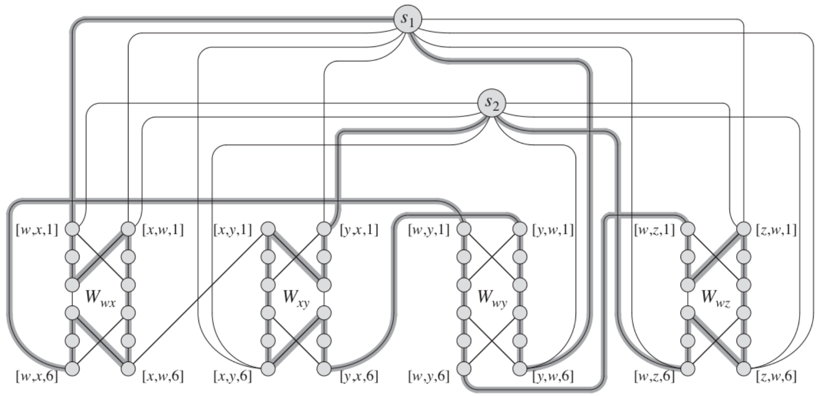


- O último tipo de aresta em $E'$ une os vértices $[u, v_1, 1]$ e $[u, v_{grau(u)}, 6]$ a cada um dos seletores.






- Fazendo esse mesmo procedimento para todos os vértices obtemos o seguinte grafo, que é grande mas ainda é polinomial.



- Com 12 vértices por engenhoca, mais $k \leq |V|$ vértices seletores, em um total de

$$\begin{aligned} |V'| &= 12|E| + k \\ &\leq 12|E| + |V| \end{aligned}$$

- Para cada vértice $u \in V$ temos $grau(u) - 1$ arestas entre as engenhocas, em um total de

$$\sum_{u \in V} (grau(u) - 1) = 2|E| - |V|$$

- Cada engenhoca tem 14 arestas, além das arestas entre os vértices seletores, no total

$$\begin{aligned} |E'| &= (14|E|) + (2|E| - |V|) + (2k|V|) \\ &= 16|E| + (2k-1)|V| \\ &\leq 16|E| + (2|V| - 1)|V| \end{aligned}$$

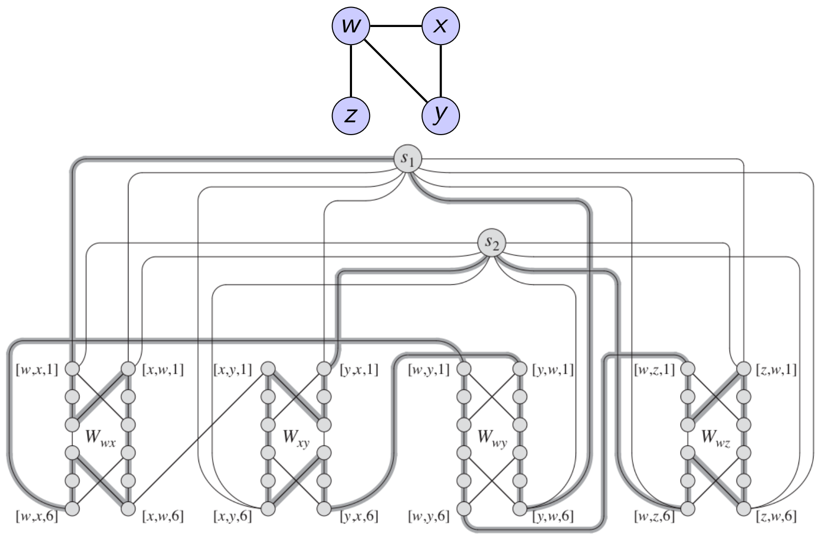


**Lema**

*$G$ tem uma cobertura por vértices de tamanho $k$, se e somente se, $G'$ tem um caminho hamiltoniano.*

- ($\rightarrow$) Suponha que $G = (V, E)$ tem uma cobertura por vértices $V' \subseteq V$ de tamanho $k$.
- Para cada vértice $u \in V*$ com os vértices $(v_1, \ldots, v_k)$, adicionamos no caminho as arestas que ligam a primeira engenhocas que representa $v_i$ ao seletor $s_i$.
- Depois ligamos a saída da primeira engenhoca, com a próxima do vértice $v_i$.
- Por fim ligamos a ultima engenhoca ao próximo seletor $s_{i+1 mod k}$.
- Além disso ligamos os vértices internos da engenhoca dependendo se a aresta é coberta por um ou por dois vértices.
- No exemplo se $k = 2$, temos uma cobertura formada por $w$ e $y$.



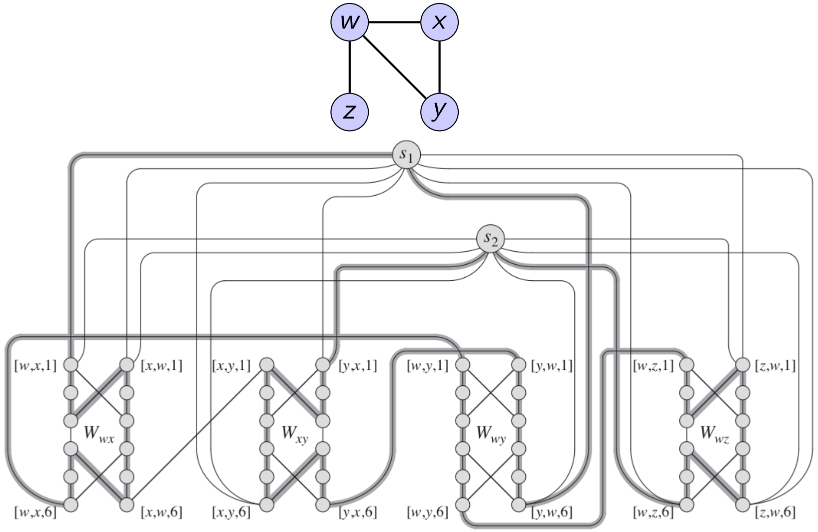





- Como a cobertura por vértices incide em todas as aresta, todas as engenhocas serão visitadas (uma ou duas vezes), assim como os vértices seletores. E portanto formamos um ciclo hamiltoniano.
- ($\leftarrow$) Suponha que $G' = (V', E')$ tem um ciclo hamiltoniano $C \subseteq E'$. Afirmamos que o conjunto

$$V' = \{u \in V : (s_j, [u, v, 1]) \in C \text{ para algum } 1 \leq j \leq k\}$$

- é uma cobertura por vértices para $G$.
- Como o caminho que sai de um seletor passa pelas engenhocas até chegar em algum seletor (já que é um ciclo hamiltoniano).
- Pela forma como $G'$ foi construído, os vértices internos de cada engenhoca $W_{uv}$ só podem ser visitados se o caminho teve inicio em $u$ ou $v$, e portanto este estará na cobertura por vértices.






Resumindo:

- Mostramos que HAM-CYCLE $\in$ NP
- Mostramos que HAM-CYCLE $\in$ NP-Difícil
  - Mostrando uma redução de qualquer instância do VERTEX-COVER para HAM-CYCLE
  - Essa redução é de tempo polinomial
  - Essa redução é correta, ou seja a instância do VERTEX-COVER decide sim se e somente se a instância do HAM-CYCLE decide sim.
- Portanto demonstramos que HAM-CYCLE $\in$ NP-Completo. $\square$

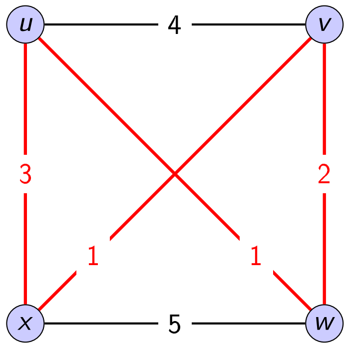


## Caixeiro Viajante

**Problema do Caixeiro Viajante - TSP**

Dado um grafo completo não direcionado $G = (V, E)$, custos inteiros $c(i, j)$ para $i, j \in V$ e um inteiro $k$ decidir se existe um ciclo que passa exatamente uma vez por cada vértice (hamiltoniano) com custo menor ou igual a $k$.






Existe uma solução com custo menor ou igual a 7? Sim.

**Teorema**

*TSP é NP-completo*

**Lema**

$TSP \in NP$

**Lema**

$TSP \in$ *NP-Difícil*



**Lema**

$TSP \in NP$

- Dado uma instância do problema, podemos usar como certificado a sequência de $n$ vértices do percurso.
- O algoritmo de verificação confirma se a sequência contém cada vértice uma vez, e se a soma dos custos das arestas é menor ou igual a $k$.
- Esse algoritmo pode ser feito em tempo polinomial.



**Lema**

$TSP \in$ *NP-Difícil*

- Mostraremos que HAM-CYCLE $\leq_p$ TSP.
- Seja $G = (V, E)$ uma instância do HAM-CYCLE.
- Construímos uma instância do TSP da seguinte maneira: Formamos o grafo completo $G' = (V, E')$, e custos:

$$c(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \in E, \\ 1 & \text{se } (i,j) \notin E. \end{cases}$$

- Essa instância pode ser criada em tempo polinomial.



- Agora mostramos que $G$ tem um ciclo hamiltoniano, se e somente se, $G'$ tem um percurso cujo custo é zero.
- $(\rightarrow)$ Suponha que $G$ tenha um ciclo hamiltoniano $h$. Cada aresta $h \in E$ e portanto tem custo 0 em $G'$. Dessa forma $h$ também é um percurso em $G'$ e tem custo 0.
- $(\leftarrow)$ Suponha que $G'$ tenha um percurso $h'$ de custo menor ou igual a 0. Como só exitem arestas de custo 0 ou 1, o custo de $h'$ é exatamente 0. Portanto as arestas de $h'$ exitem em $G$ e formam um ciclo hamiltoniano.

## Problema da Soma de Subconjuntos

**Problema da Soma de Subconjuntos - SUBSET-SUM**

Dado um conjunto finito $S$ de inteiros positivos e um inteiro $t > 0$. Decidir se existe um subconjunto $S' \subseteq S$ cuja a soma de seus elementos é $t$.

- Por exemplo: seja $S = \{1, 2, 7, 14, 49, 98, 343\}$ e $t = 108$.
- O conjunto $S' = \{1, 2, 7, 98\}$ é uma solução.



**Teorema**

*SUBSET-SUM é NP-completo*

**Lema**

*SUBSET-SUM $\in$ NP*

- Exercício.

**Lema**

*SUBSET-SUM $\in$ NP-Difícil*



**Lema**

*SUBSET-SUM $\in$ NP-Difícil*

- Mostraremos que 3-CNF-SAT $\leq_p$ SUBSET-SUM.
- Considere uma fórmula $f$ para as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com cláusulas $C_1, C_2, \ldots, C_k$.
- Construiremos uma instância $< S, t >$ para o SUBSET-SUM da seguinte forma:
- Dois números para cada variável $x_i$ ($v_i$ e $v_i'$),
- e dois números para cada cláusula $C_j$ ($s_j$ e $s_j'$)
- cada número terá $n + k$ dígitos.



- Rotulamos os $n$ primeiros dígitos para cada uma das variáveis,
- e os $k$ últimos dígitos para cada uma das cláusulas.

- O alvo $t$ tem os $n$ primeiros dígitos iguais a 1 e o restante iguais a 4.
- $v_i$ e $v_i$ tem 1 nos dígitos rotulados por $x_i$.
- $v_i$ tem 1 nos dígitos rotulados pelas cláusulas em que $x_i$ aparece (não negado).
- $v_i'$ tem 1 nos dígitos rotulados pelas cláusulas em que $\neg x_i$ aparece.
- $v_i$ e $v_i'$ tem 0 nos demais dígitos.
- $s_j$ tem 1, e $s_j'$ tem 2 nos dígitos rotulados por $C_j$ e 0 em todos os outros.



$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge$$
$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge$$
$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge$$
$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1 =$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $v_1' =$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $v_2 =$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $v_2' =$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $v_3 =$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $v_3' =$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $s_1 =$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $s_1' =$ | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| $s_2 =$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $s_2' =$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| $s_3 =$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $s_3' =$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| $s_4 =$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $s_4' =$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| $t =$ | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 |



- Falta mostrar que $f$ é satisfazível, se e somente se, a instância $< S, t >$ do SUBSET-SUM tem uma solução.
- $(\rightarrow)$ Suponha que $f$ tem uma atribuição que a torna verdadeira. Para $i = 1, 2, \ldots, n$ se $x_i = 1$ incluímos $v_i$ em $S'$, se $x_i = 0$ incluímos $v_i'$ em $S'$.
- Como cada cláusula é satisfeita, a soma em cada dígito rotulado como $C_j$ é no mínimo 1 e no máximo 3, dessa forma basta colocar em $S'$ os valores $s_j$ e $s_j'$ que completam 4 naquele dígito.
- $(\leftarrow)$ Exercício.