Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
- Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMml k03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

Limitantes

Em um problema de maximização:

- Um limitante superior é um valor maior ou igual que o ótimo. Pode ser obtido através de alguma relaxação do problema por exemplo. (limitante dual)
- Um limitante inferior é um valor menor ou igual que o ótimo. Poder ser obtido por uma heurística por exemplo. (limitante primal)

Exemplo: Problema da Mochila Binária.

Itens	1	2	3	4	5
Pesos	2	5	4	6	5
Valor	10	11	10	13	14

Capacidade da Mochila: 14

Limitante Inferior:

- Qualquer solução pode ser considerada um limitante inferior.
- Por exemplo se pegarmos os itens na ordem que foram dados até encher a mochila.

Pesos	**2**	**5**	**4**	6	5
Valor	**10**	**11**	**10**	13	14

Solução: 31

- A solução ótima que tem valor z^* é pelo menos 31. Ou seja $z^* \geq 31$
- Podemos tentar fortalecer esse limitante.
- E se escolhermos os itens na ordem dos que tem o melhor custo-benefício (valor/peso)

Valor/Peso (Custo-Benefício)	5	2.2	2.5	2.166	2.8
Pesos	**2**	5	**4**	6	**5**
Valor	**10**	11	**10**	13	**14**

Solução: 34, ou seja $z^* \geq 34$

Limitante Superior (Dual)

Itens	1	2	3	4	5
Pesos	2	5	4	6	5kg
Valor	10	11	10	13	14

- Se conseguíssemos preencher toda a mochila com o item que vale mais a cada kg?

Valor/Peso (Custo-Benefício)	5	2.2	2.5	2.166	2.8

- Se enchermos os 14kg que cabem na mochila com 5$ por kg.
- Um limitante superior para esse problema é $14 * 5 = 70$, ou seja $z^* \leq 70$
- Ou seja é verdade que nenhuma solução (incluindo a ótima) pode ser maior que 70.
- Esse limitante claro é bem fraco. E se enchermos a mochila só com os itens que temos até encher completamente a mochila, relaxando a integralidade.

Itens	1	2	3	4	5
Pesos	2	5	4	6	5kg
Valor	10	11	10	13	14
Valor/Peso (Custo-Benefício)	5	2.2	2.5	2.166	2.8

Pegamos o item 1, depois pegamos o item 5, depois o item 3 e enchemos o resto da mochila com 0.6 do item 2.

$$10 + 0.6 * 11 + 10 + 14 = 40.6$$

- Concluímos que a solução ótima pode ser no máximo 40.6.
- De fato como todos os valores são inteiros, podemos afirmar que $z^* \leq 40$

Itens	1	2	3	4	5
Pesos	2	5	4	6	5kg
Valor	10	11	10	13	14

- Concluimos que $34 \leq z^* \leq 40$.
- Se encontrarmos uma solução com custo igual ao limitante superior (40 no exemplo), temos certeza que ela é ótima.
- Mas a solução ótima para esse problema é a seguinte

Pesos	**2**	5	4	**6**	**5kg**
Valor	**10**	11	10	**13**	**14**

Solução: 37.

Branch-and-Bound

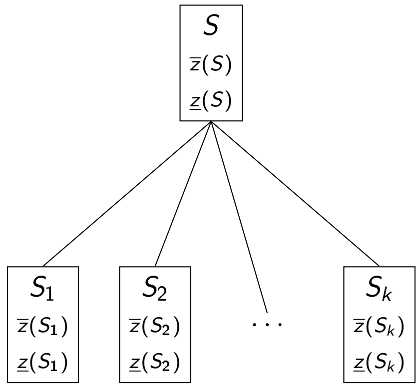
- Técnica empregada na resolução de problemas difíceis de otimização combinatória.
- O BnB enumera implicitamente todas as soluções do problema.
- Implicitamente, pois se explorasse de fato todas as soluções seria equivalente a um algoritmo de força-bruta.

- Os algoritmos de BnB são uma aplicação do paradigma de divisão e conquista.
- O Branch-and-Bound tem duas partes principais, que como você pode imaginar são:
  - *Branch*: ramificação, que é o processo de dividir o problema.
  - *Bound*: que é a busca por limitantes (inferiores e superiores) para cada subproblema.

Branch-and-Bound

- Considere um problema de maximização qualquer, em que desejamos encontrar a solução ótima.
- Seja S o conjunto de todas as soluções viáveis.
- Seja $f : S \to \mathbb{R}$ a função objetivo que mapeia cada solução $s \in S$ a um valor real.

- Vamos considerar que podemos calcular bons limitantes superiores e inferiores para um conjunto $S' \subseteq S$.
  - Seja $\overline{z}(S')$ um limitante dual (superior) para S', ou seja, um valor tal que nenhuma solução de S' tenha um valor de função objetivo maior que $\overline{z}(S')$. $f(s \in S') \leq \overline{z}(S')$
  - Seja $\underline{z}(S')$ um limitante primal (inferior) para S', ou seja, existe (com certeza) alguma solução em S' que tenha valor igual ou superior a $\underline{z}(S')$. $max\{f(s) | s \in S'\} \geq \underline{z}(S')$
- Seja $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ uma partição de S, ou seja, $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k = S$.
- Podemos calcular os limitantes primais e duais tanto para S quanto para S_1, S_2, ..., S_k.

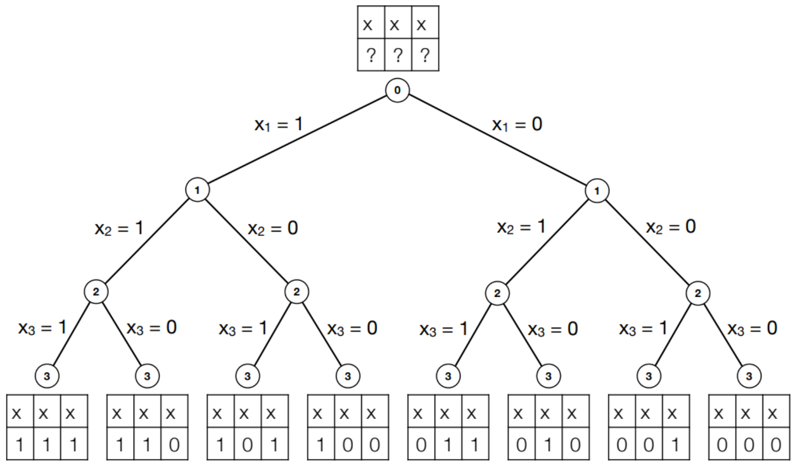


- Suponha que $\overline{z}(S_i) \leq \underline{z}(S_j)$. Como estamos buscando a solução ótima, ou seja, a solução com o maior valor. Sabemos que a melhor solução em S_i vai ser pior (ou igual) a melhor solução em S_j e por isso podemos buscar a solução apenas em S_j, *podando* S_i. Essa é a comumente chamada **poda por limitante**.

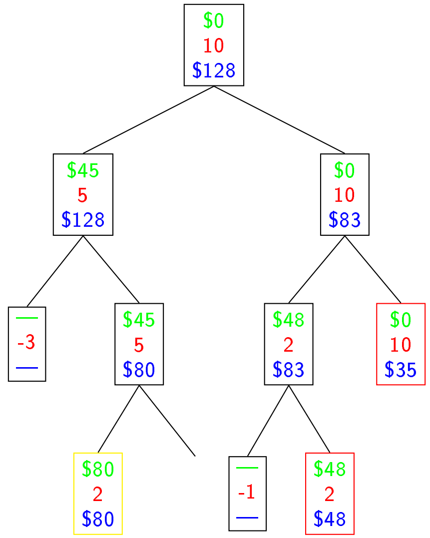
$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 45x_1 + 48x_2 + 35x_3 \\
\text{subject to} & \\
 & 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 10 \\
 & x_i \in \{0,1\} \quad (i \in 1..3)
\end{array}
$$
[1]

- Como vamos subdividir o espaço de busca? Vamos dividir entre as decisões que podemos fazer em cada item.

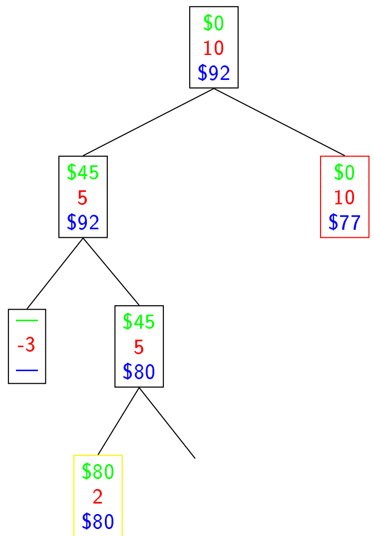
[1] Discrete Optimization, Professor Pascal Van Hentenryck



- Vamos simular a exploração
- Limitante inferior: Os itens que já estão na solução parcial.
- Limitante superior: Vamos relaxar a capacidade da mochila. (Ainda vamos verificar quando a mochila ultrapassa a capacidade)
- Vamos denotar cada solução pelo valor do limitante inferior (verde) a capacidade residual (vermelho) e o limitante superior (azul).



- Limitante superior: Vamos relaxar a integralidade da mochila, ou seja, podemos pegar uma fração de um item.

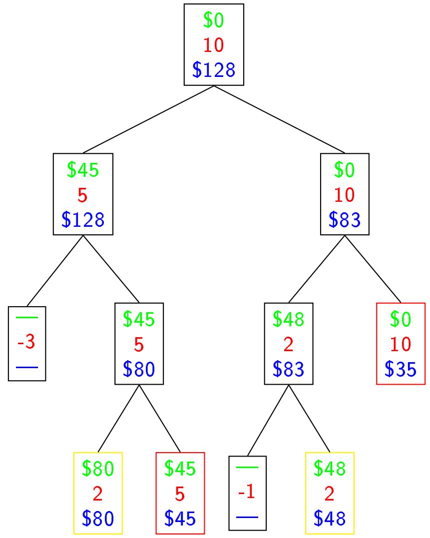


Branching Strategies

Estratégias de Ramificação

- Podemos elaborar diferentes estratégias para explorar os nós de uma árvore de branch-and-bound.
- A Depth First (que vimos anteriormente) sempre desce o mais profundo possível (indo sempre o mais a esquerda possível e depois para a direita)
- Cada estratégia pode ser um desempenho diferente dependendo do problema (e da instância).
- Mas podemos analisar alguns aspectos. Por exemplo, qual a eficiência de memória do Depth First?

Best-First



Best-First

- Sempre expande o nó "Mais promissor", ou seja, aquele que tem o maior limitante superior (no caso de um problema de maximização)
- Ele poda sempre que encontra um nó em que o limitante já é pior do que a melhor solução conhecida.
- Ele é eficiente em memória? Não muito, pode ter um número muito grande de nós ativos e cada nó precisa conter uma forma de recuperar a solução parcial.
- Ele é fácil de implementar? Normalmente é mais difícil do que o Depth-First

Ramificações

- A ideia então é dividir o espaço de soluções, calculando os limitantes e podando os nós que não fornecem soluções promissoras.
- A forma de dividir, depende do problema e da estratégia aplicada. A ideia é que a cada divisão represente uma escolha diferente.

- Por exemplo, no problema da mochila uma divisão pode ser decisão por colocar o item *i* na mochila e a decisão de não colocar o item *i* na mochila.
- Nesse exemplo obteríamos uma árvore binária, e cada nível dessa árvore pode representar a escolha de um item diferente.

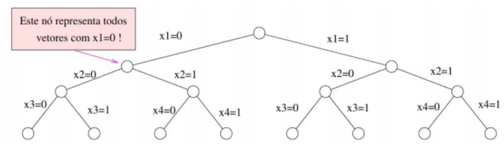


Figura 1.8. Árvore de enumeração completa para o problema binário da mochila com 3 itens. [2]

[2] https://ic.unicamp.br/ fkm/lectures/intro-otimizacao.pdf

Outros exemplos:

- No problema do caixeiro viajante cada escolha poderia ser a escolha do próximo vértice a visitar, e nesse caso a árvore não seria binária.
- No problema de encontrar a clique máxima, uma escolha poderia ser a inclusão de um item na clique.
- No problema do *bin packing*, uma escolha poderia ser uma atribuição de um item a um contêiner.
- etc.

Algoritmo[3]

`B&B`; (* considerando problema de **maximização** *)
    `Ativos` $\leftarrow$ {nó raiz}; `melhor-solução` $\leftarrow$ {}; $\underline{z} \leftarrow -\infty$;
    Enquanto (`Ativos` não está vazia) **faça**
        Escolher um nó k em `Ativos` para ramificar;
        Remover k de `Ativos`;
        Gerar os filhos de k: $n_1, \ldots, n_q$ computando $\overline{z}_{n_i}$ e $\underline{z}_{n_i}$ correspondentes;
            (* definir $\overline{z}_{n_i}$ e $\underline{z}_{n_i}$ iguais a $-\infty$ para subproblemas inviáveis *)
        Para $j = 1$ **até** q **faça**
            se ($\overline{z}_{n_i} \leq \underline{z}$) **então** podar o nó n_i; (* inclui os 3 casos *)
            se não
                Se (n_i representa uma única solução) **então** (* atualizar melhor limitante primal *)
                    $\underline{z} \leftarrow \overline{z}_{n_i}$; `melhor-solução` $\leftarrow$ {solução de n_i};
                se não adicionar n_i à lista `Ativos`.

[3] https://ic.unicamp.br/ fkm/lectures/intro-otimizacao.pdf

Outros ramificações:

- Least-Discrepancy: Ramifica em ondas, a cada onda ele permite que uma curva a mais aconteça na árvore.