

Algoritmos

Pedro Hokama

- [cirs] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
 - [timr] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
 - Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
 - Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
 - Stanford Algorithms
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V>
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EM12s2WQBsLsZ17A5HEK6>
 - Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
 - Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420
- Qualquer erro é de minha responsabilidade.

1 / 16

2 / 16

- Uma construtora lucra 4.6 milhões com a venda de um prédio comercial e 2.2 milhão com a venda de casas de luxo.
- Para construir um prédio comercial a construtora aloca 40 funcionários, e para as casas de luxo, 19 funcionários. Sendo que a construtora tem um total de 100 funcionários. As duas obras gastam o mesmo tempo.
- Em quantos prédio comerciais e casas de luxo a construtora deve investir?

Em quantos prédio comerciais e casas de luxo a construtora deve investir?

x é o número de prédios.

y é o número de casas.

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 4.6x + 2.2y, \\ \text{sujeito a} \quad & 40x + 19y \leq 100, \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

3 / 16

4 / 16

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && 4.6x + 2.2y, \\ &\text{sujeito a} && 40x + 19y \leq 100, \\ &&& x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

- A solução ótima para esse modelo é $x = 0$ e $y = 5.26$ que dá um lucro de 11.58 milhões.
- Infelizmente construir 26% de uma casa não dá lucro algum, de fato pode até trazer algum prejuízo.

5 / 16

Programação Linear Inteira (PLI)

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && 4.6x + 2.2y, \\ &\text{sujeito a} && 40x + 19y \leq 100, \\ &&& x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ &&& x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Quando temos variáveis inteiras, utilizamos a Programação Linear Inteira - PLI (Integer Linear Programming - ILP).

7 / 16

- Podemos arredondar para baixo (5 casas) porém essa solução não é mais ótima.
- Precisamos que as variáveis sejam inteiras!

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && 4.6x + 2.2y, \\ &\text{sujeito a} && 40x + 19y \leq 100, \\ &&& x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ &&& x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- A solução ótima desse modelo é $x = 2$ e $y = 1$.

6 / 16

- Quando temos algumas variáveis inteiras e outras contínuas temos a Programação Linear Mista (Mixed-Integer Programming - MIP).
- Infelizmente resolver um PLI ou MIP é NP-Difícil.
- Para mostrar que resolver um PLI é um problema NP-Difícil vamos mostrar uma redução do problema da mochila para um PLI.

8 / 16

Exercícios, escrever uma formulação em Programação Linear Inteira para os problemas apresentados a seguir.

Problema da Mochila

Dado uma coleção I de n itens e uma capacidade inteira W . Cada item $i \in I$ tem:

- Um valor v_i (não negativo)
- Um peso w_i (não negativo e inteiro)

Encontrar $S \subseteq I$ cujo peso não ultrapasse W , ou seja,

$$\sum_{i \in S} w_i \leq W$$

e que maximiza $\sum_{i \in S} v_i$.

9 / 16

10 / 16

Formulações em PLI

- A vantagem de usar PLI é que temos todo o framework já desenvolvido para resolvê-los.
- De fato como PLI é NP-Difícil poderíamos transformar qualquer problema em NP em um Programa Linear Inteiro.
- Não existe uma fórmula simples que funcione para qualquer problema, mas com um pouco de experiência e criatividade é possível formular uma grande variedade de problemas.

Problema de Alocação de Pessoal

São dados n pessoas e n tarefas. Cada pessoa exercerá uma tarefa, e é conhecido o valor c_{ij} indica a adequação da pessoa i para realizar a tarefa j . O objetivo é encontrar uma alocação que maximize a soma da adequação.

11 / 16

12 / 16

Problema de Coloração em Grafos

Dado um grafo não direcionado $G = (V, E)$, queremos encontrar uma cor para cada vértice, de forma que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor. O objetivo é minimizar o número de cores utilizadas.

13 / 16

Problema de Virtualização de Máquinas

São dados um conjunto de tarefas S , cada tarefa $s \in S$ com um tempo de processamento t_s , e um tempo limite C . Cada tarefa precisa ser processada em apenas uma máquina, mas cada máquina processa várias tarefas (somando seus tempos), todas as tarefas precisam ser processadas até C . Desejamos minimizar a quantidade necessária de máquinas virtuais.

14 / 16

- O problema anterior é conhecido como Bin-Packing, ou empacotamento de contêiner, ou ainda como um problema de Corte.
- Aparece com frequência em diferentes contextos, corte de bobinas de papel, vergalhões, madeira, empacotamento de contêineres para exportação, além de situações mais abstratas como a de Virtualização de Máquinas, Alocação de Recursos Financeiros, etc etc.

15 / 16

Problema de Localização de Instalações

São dados um conjunto F de possíveis instalações e um conjunto C de clientes, sendo:

- f_j o custo de abrir a instalação $j \in F$
- d_{ij} o custo de ligar o cliente $i \in C$ na instalação $j \in F$

O objetivo é encontrar quais instalações abrir e conectar todo cliente a uma instalação aberta minimizando o custo total.

16 / 16