Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
- Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
- Stanford Algorithms
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

Algoritmo de Karatsuba

Multiplicação de Inteiros

Dado dois inteiros x e y de n dígitos cada. Encontrar o produto $x \cdot y$.

- Dividir x em duas partes, digamos a e b de $n/2$ dígitos.

$$x = a \cdot 10^{n/2} + b, \text{ no nosso exemplo } 6544 = 65 \cdot 10^2 + 44$$

- Dividir y em duas partes, digamos c e d de $n/2$ dígitos.

$$y = c \cdot 10^{n/2} + d$$

$$x = a \cdot 10^{n/2} + b$$
$$y = c \cdot 10^{n/2} + d$$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (a \cdot 10^{n/2} + b)(c \cdot 10^{n/2} + d) \\ &= ac \cdot 10^{n/2} \cdot 10^{n/2} + ad \cdot 10^{n/2} + bc \cdot 10^{n/2} + bd \\ &= ac \cdot 10^{n} + 10^{n/2}(ad + bc) + bd \end{aligned}$$

- Então se calcularmos ac, ad, bc, e bd que são todas multiplicações de números com $n/2$ dígitos (portanto menor que os x e y com n dígitos) podemos fazer algumas operações simples e obter o resultado para o problema original.
- Obviamente podemos calcular ac, ad, bc, e bd com 4 chamadas recursivas para esse algoritmo. O caso base é quando temos números de 1 dígito que sabemos calcular.

Algoritmo de Karatsuba

$$x \cdot y = ac \cdot 10^n + 10^{n/2}(ad + bc) + bd$$

- Observe que:

$$ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$$

- Dessa forma podemos fazer o seguinte:
  1. calcular ac
  2. calcular bd
  3. calcular $(a + b)(c + d)$
  4. calcular $e = (a + b)(c + d) - ac - bd$
  5. somar $a.c.10^n + b.d + e.10^{n/2}$

1. calcular ac
2. calcular bd
3. calcular $(a + b)(c + d)$
4. calcular $e = (a + b)(c + d) - ac - bd$
5. somar $a.c.10^n + e.10^{n/2} + b.d$

$$6544 \cdot 2123$$

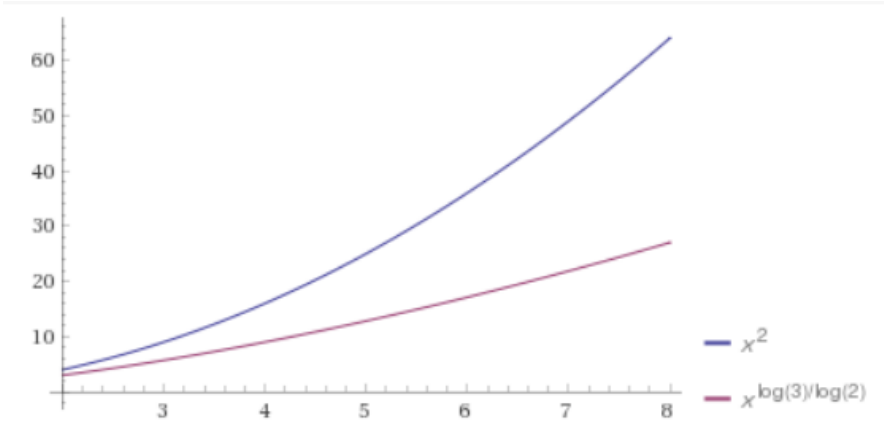
$$a = 65, b = 44, c = 21, d = 23$$

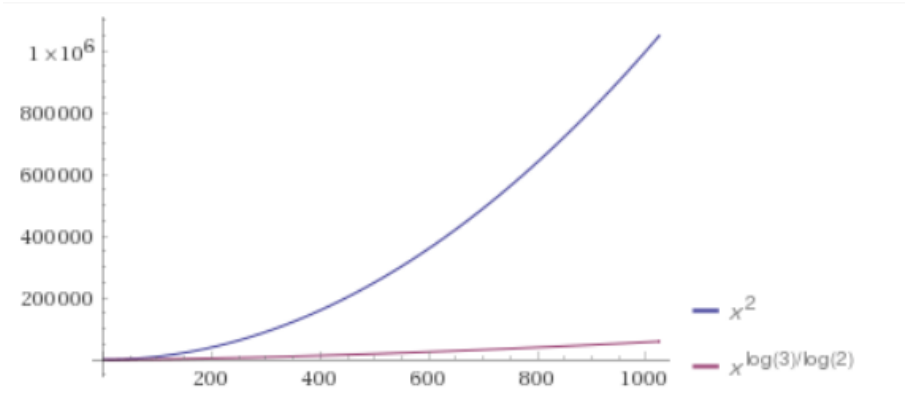
1. $ac = 1365$
2. $bd = 1012$
3. $(a + b)(c + d) = (109 \cdot 44) = 4796$
4. $e = 4796 - 1365 - 1012 = 2419$
5. $13650000 + 241900 + 1012$

$$13892912$$

Algoritmo de Karatsuba

- ao invés de cn^2 esse algoritmo faz $c'n^{\log_2 3} = c'n^{1.586}$





John von Neumann

- John von Neumann (1903 - 1957) nascido na Hungria e de origem judaica. Naturalizado americano em 1937.
- Foi membro do Instituto de Estudos Avançados de Princeton, Nova Jérsei, do qual fazia parte Albert Einstein, Kurt Gödel e vários outros grandes cientistas.
- Dentre diversas contribuições para a matemática, ciência da computação, física, etc. Neumann descreveu em 1945 o algoritmo MergeSort.

MergeSort (Ordenação por Intercalação)

Por que veremos um algoritmo de 1945?

- É o algoritmo de escolha ainda hoje por ser realmente eficiente
- Muito melhor do que a complexidade quadrática (InsertionSort, SelectionSort, etc)

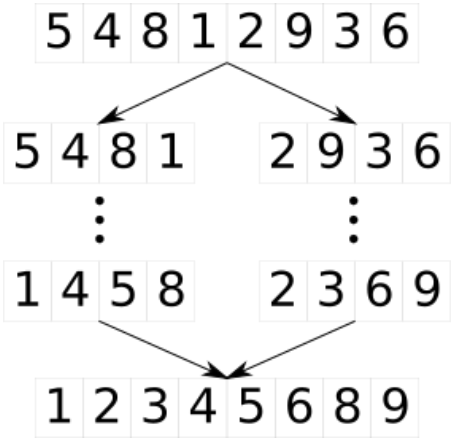
Por que veremos novamente o MergeSort?

- É claro sobre o método de divisão e conquista
- Vai preparar vocês para análises de complexidade mais complicadas.

Problema da Ordenação

Dado um arranjo de n inteiros distintos, encontrar o arranjo $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ que contenha os mesmos elementos mas ordenados de maneira não decrescente, ou seja, $\pi_i \leq \pi_j$ para qualquer $i < j$ e $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

MergeSort



Pseudo-Código para o MergeSort:

Algoritmo 1: MergeSort

Entrada: Um arranjo com n
Saída: Um arranjo com os mesmos números ordenados

1 **se** $n \geq 2$ **então**
2 A = Recursivamente ordenar a primeira metade do arranjo de entrada;
3 B = Recursivamente ordenar a segunda metade do arranjo de entrada;
4 C = Intercalar (Merge) as duas partes ordenadas A e B em uma;
5 **devolva** C;

Pseudo-Código para o Merge:

Algoritmo 2: Merge

Entrada: A e B arranjos ordenados com $m/2$
Saída: Arranjo C de tamanho m com os mesmos elementos de A e B mas ordenados

1 $i = 1$;
2 $j = 1$;
3 **para** k *de 1 até* m **faça**
4 **se** $A[i] < B[j]$ **então**
5 $C[k] = A[i]$;
6 $i++$;
7 **senão**
8 $C[k] = B[j]$;
9 $j++$;
10 **devolva** C;
11 Exercício: verificar finalizações (se A ou B acabarem etc).

MergeSort

- Qual o tempo de execução do MergeSort? Quantas operações básicas faz o MergeSort? Qual o número de linhas de código executadas pelo MergeSort?
- Primeiro nos perguntaremos qual o tempo de execução do Merge?

Pseudo-Código para o Merge:

Algoritmo 3: Merge

Entrada: A e B arranjos ordenados com $m/2$
Saída: Arranjo C de tamanho m com os mesmos elementos de A e B mas ordenados

```
1  i = 1;
2  j = 1;
3  para k de 1 até m faça
4  |  se A[i] < B[j] então
5  |  |  C[k] = A[i];
6  |  |  i++;
7  |  senão
8  |  |  C[k] = B[j];
9  |  |  j++;
10 |  fim
11 fim
12 devolva C;
13 Exercício: verificar finalizações (se A ou B acabarem etc).
```

Um incremento de k e uma comparação

Essas 2 ou essas 2

m vezes

Um total de 4m + 2 $\leqslant$ 6m

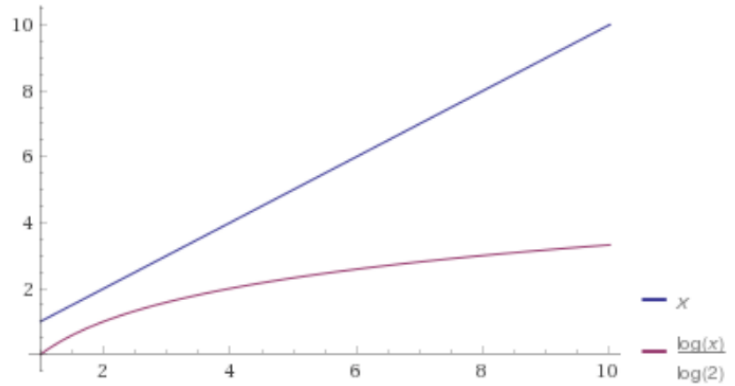
- Analisar o MergeSort é um pouco mais desafiador pois cada problema faz 2 chamadas recursivas, causando uma explosão de subproblemas. A boa notícia é que cada vez que dividimos um subproblema em dois, cada um deles tem metade do tamanho.
- De fato é esse equilíbrio entre a quantidade de subproblemas e o tamanho de cada subproblema que vai ditar a complexidade de um algoritmo recursivo.

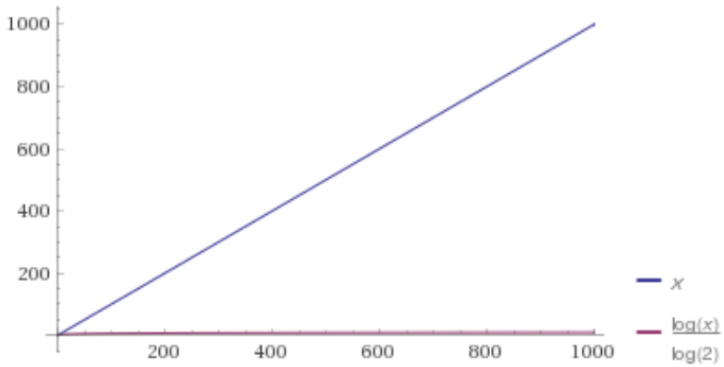
Complexidade do MergeSort

Teorema

MergeSort exige menos de $6n \log_2 n + 6n$ *operações para ordenar* n *números.*

- Antes de provar esse teorema, nos perguntamos, será que esse limitante é bom?
- Relembre que os algoritmos mais triviais exigiam uma contante vezes n^2, enquanto o MergeSort é uma constante vezes $n \log_2 n$.
- Outra breve lembrança é do que é um $\log_2$, de maneira informal podemos dizer que $\log_2$ de um número, é a quantidade de vezes que você precisa dividir por 2 até chegar em 1.
- Então o $\log_2 4$ é 2, $\log_2 8 = 3$, $\log_2 16384 = 14$. Ou seja $\log_2 n$ é uma função que cresce devagar.

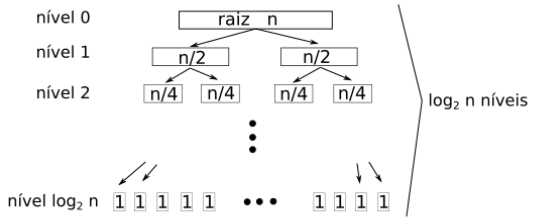




Complexidade do MergeSort

- Para demonstrar a complexidade do MergeSort iremos usar um recurso conhecido como árvore de recursão
- Ressalva: Alguns autores não consideram uma árvore de recursão como uma prova completa para uma afirmação.

Árvore de Recursão



Aproximadamente quantos níveis tem essa árvore de recursão? Sendo n o número de elementos no vetor.

a. Um número constante (independente de n)
b. $\log_2 n$
c. $\sqrt{n}$
d. n

Resposta:

- $\log_2 n + 1$ (nível 0)

Qual o padrão? Em cada nível $j = 0, 1, \ldots, \log_2 n$, existem ___ subproblemas, cada um com tamanho ___.

a. 2^j e 2^j
b. $n/2^j$ e $n/2^j$
c. 2^j e $n/2^j$
d. $n/2^j$ e 2^j

Teorema

MergeSort exige menos de $6n \log_2 n + 6n$ operações para ordenar n números.

Demonstração.

- Em cada nível $j = 0, 1, \ldots, \log_2 n$ existem 2^j subproblemas, cada um de tamanho $n/2^j$.
- Total de operações no nível j:

$$\leq 2^j \cdot 6\left(\frac{n}{2^j}\right)$$

$$= 6(n)$$

- Total de operações: número de níveis · operações por nível

$$(\log_2 n + 1)6n$$

$$6n \log_2 n + 6n$$

□