

## Algoritmos

Pedro Hokama

- [c/rs] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
  - [timr] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
  - Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
  - Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
  - Stanford Algorithms  
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V>  
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZ17A5HEK6>
  - Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
  - Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420
- Qualquer erro é de minha responsabilidade.

1 / 15

2 / 15

## Teorema Mestre

- O teorema mestre é uma ferramenta útil para avaliar algoritmos de divisão e conquista, que normalmente precisam de uma análise matemática mais complexa.
- Por exemplo os algoritmos de Karatsuba, de Contagem de Inversões e o Algoritmo de Strassen.

3 / 15

## Problema da Multiplicação de Inteiros

## Multiplicação de Inteiros

Dado dois inteiros  $x$  e  $y$  de  $n$  dígitos cada. Encontrar o produto  $x \cdot y$ .

Dividir  $x = 10^{n/2}a + b$  e  $y = 10^{n/2}c + d$ , dessa forma:

$$xy = 10^n ac + 10^{n/2}(ad + bc) + bd$$

- Estratégia 1:
  - ▶ calcular recursivamente  $ac$ ,  $ad$ ,  $bc$  e  $bd$
  - ▶ seja  $T(n)$  o tempo de execução máximo para resolver um problema de tamanho  $n$

$$\text{Para } n > 1 : \quad T(n) \leq 4T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$\text{Caso base :} \quad T(1) \leq O(1)$$

4 / 15

## O Teorema Mestre

- Estratégia 2 (Algoritmo de Karatsuba)

- ▶  $xy = 10^n ac + 10^{n/2}(ad + bc) + bd$
- ▶ calcular recursivamente  $ac$ ,  $bd$  e  $(a + b)(c + d)$
- ▶ obter  $ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$

Para  $n > 1$ :  $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$

Caso base:  $T(1) \leq O(1)$

- Pode ser usado como uma caixa preta para resolver recorrências.
- Só funciona quando todos os subproblemas tem o mesmo tamanho.

Suponha uma recorrência da seguinte forma:

Caso base:  $T(n) \leq O(1)$  para  $n$  suficientemente pequeno

$$T(n) \leq aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$$

5 / 15

6 / 15

$$T(n) \leq aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$$

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d \log n) & \text{se } a = b^d \\ O(n^d) & \text{se } a < b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{se } a > b^d \end{cases}$$

Multiplicação de Inteiros com 4 chamadas recursivas:

- $T(n) \leq 4T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$
- Como  $4 > 2$ , caímos no caso 3. Portanto:
- $T(n) = O(n^{\log_2 4}) = O(n^2)$

Algoritmo de Karatsuba

- $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$
- Como  $3 > 2$ , também caímos no caso 3. Portanto:
- $T(n) = O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1.58496})$

$$T(n) \leq aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$$

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d \log n) & \text{se } a = b^d \\ O(n^d) & \text{se } a < b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{se } a > b^d \end{cases}$$

7 / 15

8 / 15

## Prova do Teorema Mestre

MergeSort:

- $T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$
- Como  $2 = 2$ , caímos no caso 1.  
Portanto:
- $T(n) = O(n^1 \log n) = O(n \log n)$

$$T(n) \leq aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$$

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d \log n) & \text{se } a = b^d \\ O(n^d) & \text{se } a < b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{se } a > b^d \end{cases}$$

Algoritmo de Strassen

- $T(n) \leq 7T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$
- Como  $7 > 4$ , também caímos no caso 3. Portanto:
- $T(n) = O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.81})$

9 / 15

10 / 15

$$T(n) \leq aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$$

- Considere um nível  $j$  da árvore de recursão. Quanto trabalho é executado nesse nível?
- Número de subproblemas:  $a^j$
- Tamanho de cada subproblema:  $\frac{n}{b^j}$

$$\begin{aligned} \text{Trab. no nível } j &\leq a^j O\left(\left(\frac{n}{b^j}\right)^d\right) \leq a^j \cdot c \cdot \frac{n^d}{b^{jd}} = c \cdot n^d \cdot \frac{a^j}{b^{jd}} = \\ &= c \cdot n^d \cdot \left(\frac{a}{b^d}\right)^j \end{aligned}$$

Somando todos os níveis:

$$T(n) \leq c \cdot n^d \cdot \sum_{j=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^j$$

11 / 15

- Vamos considerar que  $n$  é uma potência de  $b$ .
- Ressalva: Essa prova não está 100% rigorosa, mas funciona para entender porque e como o teorema mestre funciona
- Usaremos a árvore de Recursão

$$T(n) \leq c \cdot n^d \cdot \sum_{j=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^j$$

- $a$  é a taxa de proliferação de subproblema
- $b^d$  é a taxa de encolhimento do trabalho no subproblema
- Intuitivamente:
  - ▶ se  $a = b^d$  o trabalho é igualmente distribuído por toda a árvore e portanto  $O(n^d \log n)$
  - ▶ se  $a < b^d$  o trabalho mais bruto está na raiz, portanto  $O(n^d)$
  - ▶ se  $a > b^d$  temos muitas folhas e portanto o trabalho principal está lá, Portanto  $O(\text{número de folhas})$

12 / 15

$$T(n) \leq c \cdot n^d \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^j}_S$$

- $r = \frac{a}{b^d}$
- se  $r = 1$ ,  $S = \sum_{j=0}^{\log_b n} 1 = \log_b n$  logo

$$T(n) \leq c \cdot n^d \cdot \log_b n \text{ e ai é fácil mostra que } T(n) = O(n^d \log n)$$

- se  $r < 1$ ,  $S = \sum_{j=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^j \leq 1 + r + r^2 + \dots$  isso é uma Progressão geométrica de razão  $r < 1$ . Portanto:

$$T(n) \leq c \cdot n^d \cdot \frac{1}{1-r} \text{ e ai é fácil mostra que } T(n) = O(n^d)$$

13 / 15

$$T(n) \leq c \cdot n^d \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^j}_S$$

- Se  $r > 1$ :

$$S = \sum_{j=0}^{\log_b n} r^j = 1 + r + r^2 + \dots + r^{\log_b n}$$

Isso é uma PG de razão  $r$ .

$$S_x = \frac{a_1(1-r^x)}{1-r} \quad S = \frac{1-r^{\log_b n}}{1-r} = \frac{r^{\log_b n} - 1}{r-1} \leq c' r^{\log_b n}$$

14 / 15

logo

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c \cdot n^d \cdot c' \cdot r^{\log_b n} = c \cdot n^d \cdot c' \cdot \frac{a^{\log_b n}}{b^{\log_b n \cdot d}} = c \cdot n^d \cdot c' \cdot \frac{a^{\log_b n}}{n^d} = \\ &= c \cdot \cancel{n^d} \cdot c' \cdot \frac{a^{\log_b n}}{\cancel{n^d}} \end{aligned}$$

$T(n) \leq cc' a^{\log_b n} = cc' n^{\log_b a}$  e ai é fácil mostra que

$$T(n) = O(n^{\log_b a}) \quad \square$$

15 / 15