

Algoritmos

Pedro Hokama

- [c/s] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
 - [timr] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
 - Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
 - Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
 - Stanford Algorithms
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V>
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6>
 - Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
 - Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420
- Qualquer erro é de minha responsabilidade.

1 / 22

2 / 22

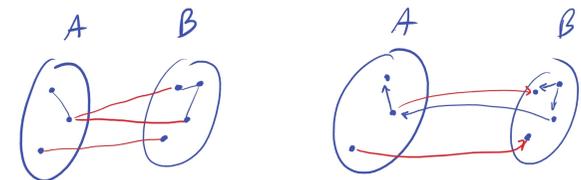
Corte Mínimo em Grafos

Cortes em Grafos

Definição

Um corte de um Grafo $G = (V, E)$ é uma partição de V em dois conjuntos não vazios A e B .

- Algoritmo Aleatorizado de Contração



Uma **aresta de corte** de um corte (A, B) são aquelas com

- um extremo em A e outro em B (em grafos não direcionados)
- com o início em A e o final em B (em grafos direcionados)

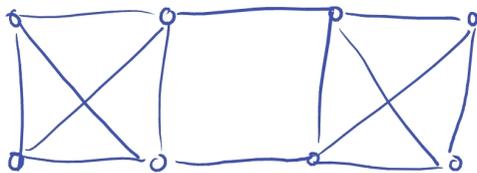
3 / 22

4 / 22

Cortes em Grafos

Quantos cortes (aproximadamente) um grafo com n vértices tem?

- n
- n^2
- 2^n
- n^n



Quantas arestas de corte tem um corte mínimo no grafo acima?

- 1
- 2
- 3
- 4

O Problema do Corte Mínimo

Problema do Corte Mínimo

Dado um Grafo não direcionado $G = (V, E)$. Encontrar um corte com o menor número de arestas.

- O corte com o menor número de arestas em um grafo é o **corte mínimo**
- Arestas paralelas são permitidas.

5 / 22

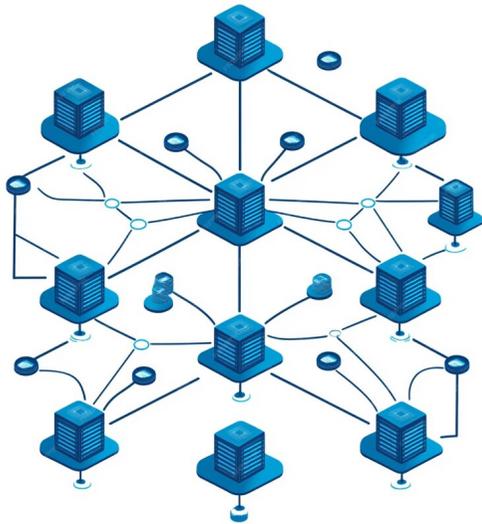
6 / 22

Cortes em Grafos

Aplicações

7 / 22

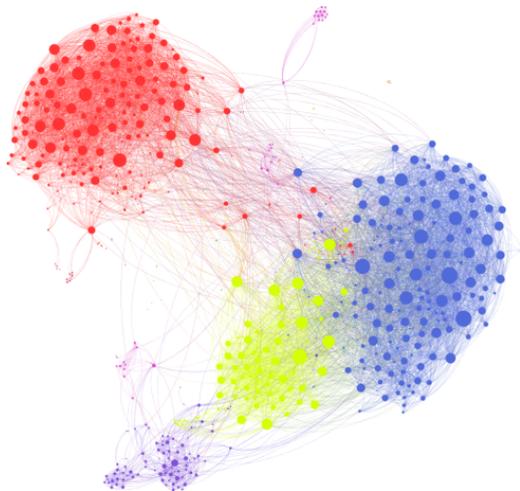
8 / 22



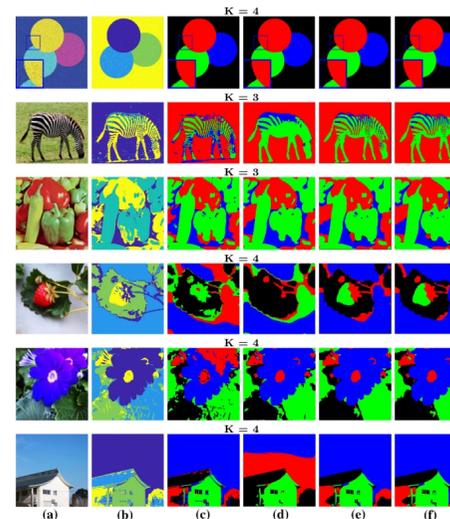
Suponha que você queira redundância na sua rede para que a falha em uma (ou duas, ou mais) arestas principais não desconecte sua rede.



Ou suponha que você quer sabotar um inimigo bombardeando uma estrada desconectando suas cidades.



Detecção de comunidade em uma rede social. Grupos de usuários conectados entre si, mas com pouca conexão para o restante do grafo.



Em reconhecimento de imagem, você pode entender cada pixel de uma imagem como um vértice com arestas para seus vizinhos, cada aresta com um peso de acordo com a semelhança dos dois pixels. Um corte mínimo pode ser usado para encontrar objetos dentro da imagem.

Algoritmo Aleatorizado de Contração

- Publicado por David Ron Karger, em 1993, quando aluno do Doutorado na Universidade de Stanford. (Hoje é professor no MIT)
- Ideia:

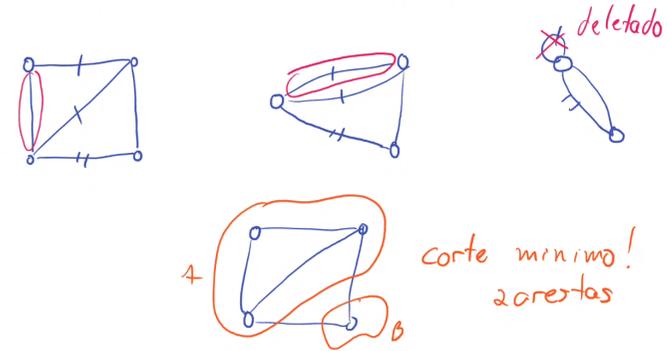
Algoritmo 1: Algoritmo Aleatorizado de Contração

Entrada: Um Grafo G

Saída: Um Corte

- 1 enquanto *houverem mais de 2 vértices* faça
 - 2 escolha uma aresta aleatória $\{u, v\}$ com probabilidade uniforme;
 - 3 fundir (contrair) u e v em um único vértice;
 - 4 remover auto-laços ;
 - 5 **devolva** o corte representado pelos 2 vértices finais;
-

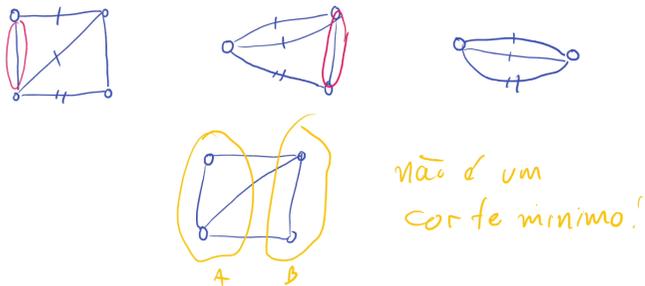
Exemplo - Execução



13 / 22

14 / 22

Exemplo - Execução2



- Algoritmo Aleatorizado de Contração as vezes encontra o corte mínimo, as vezes não.
- Será que um algoritmo assim é útil?
- A probabilidade de encontrar a resposta certa, é maior que zero, mas menos que 1. Mas qual será? 🤔

15 / 22

16 / 22

Revisão(zinha) de Probabilidade - parte2

Probabilidade Condicional

Na primeira revisão de probabilidade vimos:

- Espaço Amostral
- Eventos
- Variáveis Aleatórias
- Esperança
- Linearidade da Esperança

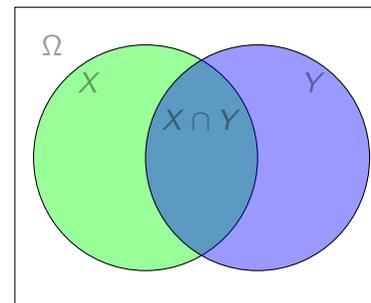
Hoje veremos:

- Probabilidade condicional
- Independência de Eventos e Variáveis Aleatórias

Probabilidade Condicional

Entender a probabilidade de um evento dado um segundo evento.

- Considere os eventos $X, Y \subseteq \Omega$.



- Então a probabilidade de X dado Y é:

$$Pr[X|Y] = \frac{Pr[X \cap Y]}{Pr[Y]}$$

- Suponha que você jogue 2 dados, qual a probabilidade de pelo menos um dado ser 1 dado que a soma deles é 7?

- ▶ 1/36
- ▶ 1/6
- ▶ 1/3
- ▶ 1/2

- $X =$ pelo menos um dado é um 1
- $Y =$ a soma de dois dados é 7
- $Y =$ $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
- $X \cap Y = \{(1, 6), (6, 1)\}$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S'											
$ S' $	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

$$\begin{aligned}
 & Pr[\text{um dado ser 1} | \text{a soma é sete}] \\
 &= \frac{Pr[\text{um dado ser 1 e a soma ser sete}]}{Pr[\text{soma ser sete}]} \\
 &= \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{36} \cdot \frac{36}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Independência de Eventos

Definição

Eventos $X, Y \subseteq \Omega$ são independentes se e somente se

$$Pr[X \cap Y] = Pr[X] \cdot Pr[Y]$$

- Uma definição equivalente é $Pr[X|Y] = Pr[X]$

Independência de Variáveis Aleatórias

Definição

Variáveis aleatórias A e B definidas para um mesmo Ω são independentes se e somente se os eventos $A = a$ e $B = b$ são independentes para todo a e b

- Uma definição equivalente é $Pr[A = a \text{ e } B = b] = Pr[A = a] \cdot Pr[B = b]$
- Se as variáveis são independentes $E[A \cdot B] = E[A] \cdot E[B]$
(diferentemente da linearidade da esperança, essa propriedade só se aplica a variáveis independentes)