Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
- Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

Representação de Caracteres

- Tradicionalmente caracteres são representados em binários através de uma codificação de tamanho fixo, ou seja, todo caracteres tem o mesmo número de bits, tradicionalmente 8 bits.
- Para simplificar, considere um alfabeto bem pequeno, de 6 letras { a, b, c, d, e, f}.
- Para representar esse alfabeto poderíamos usar uma representação de 3 bits.

a	b	c	d	e	f
000	001	010	011	100	101

- Para representar a palavra "babaca" precisaríamos de 18 bits:

  001000001000010000

- Para representar um texto de 100.000 caracteres, precisaríamos de 300.000 bits.

Compressão de Dados

- Suponha agora que queremos comprimir o texto, de forma a ocupar uma quantidade de bits menor.
- Uma ideia é utilizar uma codificação de tamanho variável, ao invés da de tamanho fixo.
- Considere a seguinte codificação (Spoiler: Não vai funcionar)

a	b	c	d	e	f
0	1	00	01	10	11

- Para representar a palavra "babaca" precisaríamos agora de apenas de 7 bits:

  1010000

- Para representar um texto de 100.000 caracteres, precisaríamos de menos de 200.000 bits.

Porém não funcionaria!

a	b	c	d	e	f
0	1	00	01	10	11

- Não é possível decodificar uma palavra. Por exemplo:

1010000

- Poderia ser "babaca". Mas também poderia ser "eeca" ou "bdaaaa"
- O Problema é que o código de um caractere é prefixo de outro caractere.

Solução

- Codificação de tamanho variável livre de prefixo.

a	b	c	d	e	f
0	101	100	111	1101	1100

- Dessa forma uma codificação não será ambígua.

101010101000

- Com essa codificação a palavra "babaca" precisa de 12 caracteres.

Solução

- Utilizando essa codificação em um texto de 100.000 caracteres, em que cada um aparece com a seguinte frequência:

a	b	c	d	e	f
0	101	100	111	1101	1100
45%	13%	12%	16%	9%	5%

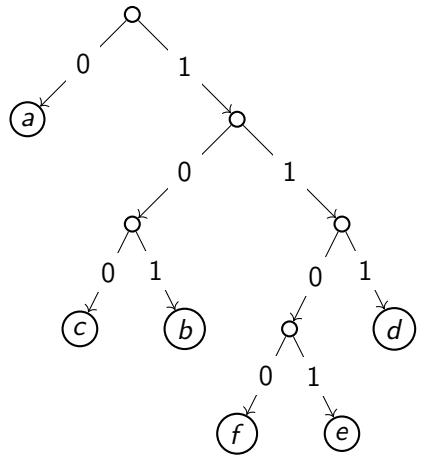
- Seriam necessários:

$$(45 \times 1 + 13 \times 3 + 12 \times 3 + 16 \times 3 + 9 \times 4 + 5 \times 4) \times 1000 = 224.000$$

- Compressões de até 90%
- Como escolher uma boa codificação?

Código de Huffman

- Criaremos uma árvore binária que representa uma codificação.
- A cada ramificação para a esquerda temos um bit 0 e cada ramificação a direita temos um bit 1.
- As folhas representam os caracteres.



Código de Huffman

- Construindo a árvore.

a	b	c	d	e	f
45%	13%	12%	16%	9%	5%

Código de Huffman

Algoritmo 1: Algoritmo de Huffman

Entrada: Um alfabeto C e suas frequências

Saída: Um código de tamanho variável livre de prefixo

```
1  Seja Q uma fila de prioridade, inicialmente vazia.;
2  para cada c em C faça
3      Q.insere(c);
4  enquanto |Q| > 1 faça
5      Criar novo Nó V;
6      V.esq = ExtraiMin(Q);
7      V.dir = ExtraiMin(Q);
8      V.freq = V.esq.freq + V.dir.freq;
9      Q.inserir(V);
10 devolva Árvore construída;
```


Complexidade

- Criar a fila de prioridade usando um Heap, pode ser feito em $O(n \log n)$ (na verdade dá para fazer até em $O(n)$.
- No laço da linha 3, cada iteração reduz o tamanho da fila em 1, então serão executadas $O(n)$ iterações.
- Dentro do laço, 2 extrações e uma inserção, que podem todas ser feitas em $O(\log n)$.
- Portanto a complexidade total do algoritmo é $O(n \log n)$

Corretude

- Exercício!
- Dicas:
  - Suponha por absurdo que uma árvore ótima T^* tem os nós mais profundos a e b, e que esses nós não são os com a menor frequência. Mostre que trocando a e b pelos nós com a menor frequência, você obtêm uma codificação melhor.
  - Aplique indução para mostrar que isso vale para os meta-nós também.