Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
- Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

Revisão(zinha) de Probabilidade

Para completar a análise do QuickSort Aleatorizado e outros algoritmos, precisamos relembrar alguns conceitos de probabilidade:

- Espaço Amostral
- Eventos
- Variáveis Aleatórias
- Esperança

Espaço Amostral

- **Espaço Amostral** Ω = todos os possíveis resultados de um evento aleatório.
- cada resultado $i \in \Omega$ tem probabilidade $p(i) \geq 0$.
- **Restrição**: $\sum_{i \in \Omega} p(i) = 1$, ou seja, com certeza um dos resultados de Ω vai acontecer.

Exemplo 1

Rolar dois dados de 6 lados.
$\Omega = \{(1,1),(2,1),(3,1),\ldots,(5,6),(6,6)\}$ (pares ordenados)
$p(i) = \frac{1}{36}$ para todos $i \in \Omega$

Exemplo 2

Escolher o índice do pivô aleatório da primeira iteração do QuickSort.
$\Omega = \{1,2,\ldots,n\}$
$p(i) = \frac{1}{n}$ para todo $i \in \Omega$

Evento

- Um **evento** é um subconjunto $S \subseteq \Omega$.
- A probabilidade de um evento S é

$$\sum_{i \in S} p(i).$$

- Considere o evento "a soma dos dados é 7". Qual é a probabilidade desse evento?
  1. $1/36$
  2. $1/12$
  3. $1/6$
  4. $1/2$
- $S = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
- $Pr[S] = 6/36 = 1/6$

- Considere o evento "o pivô aleatório escolhido induz uma divisão de pelo menos $25-75\%$ ou melhor". Qual é a probabilidade desse evento?
  1. $1/n$
  2. $1/4$
  3. $1/2$
  4. $3/4$
- $S =$ qualquer escolha que não seja os $1/4$ menores ou os $1/4$ maiores.

$$Pr[S] = \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Variáveis Aleatórias

- Uma **Variável Aleatória** X é uma função:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- Exemplo 1: A soma dos dois dados, ex: $X((2,5)) = 7$
- Exemplo 2: O valor do maior dado, ex: $Y((2,5)) = 5$
- Exemplo 3: Tamanho do subproblema passado na primeira chamada recursiva do QuickSort

Esperança

- Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma Variável Aleatória.
- A **Esperança** $E[X]$ de X é o valor médio de X ponderado pela probabilidade.

$$E[X] = \sum_{i \in \Omega} X(i) \cdot p(i)$$

- Qual a esperança da soma de dois dados?
  1. 6.5
  2. 7
  3. 7.5
  4. 8

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						⚀⚅					
					⚀⚄	⚅⚀	⚁⚅				
S'				⚀⚃	⚄⚀	⚁⚄	⚅⚁	⚂⚅			
			⚀⚂	⚀⚀	⚁⚃	⚄⚁	⚂⚄	⚅⚂	⚃⚅		
		⚀⚁	⚂⚀	⚁⚂	⚃⚁	⚂⚃	⚄⚂	⚃⚄	⚅⚃	⚄⚅	
	⚀⚀	⚁⚀	⚁⚁	⚂⚁	⚂⚂	⚃⚂	⚃⚃	⚄⚂	⚄⚄	⚅⚄	⚅⚅
$\lvert S'\rvert$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{1}{36}\cdot 2 + \frac{2}{36}\cdot 3 + \frac{3}{36}\cdot 4 + \frac{4}{36}\cdot 5 + \frac{5}{36}\cdot 6 + \frac{6}{36}\cdot 7 \\
&\quad + \frac{5}{36}\cdot 8 + \frac{4}{36}\cdot 9 + \frac{3}{36}\cdot 10 + \frac{2}{36}\cdot 11 + \frac{1}{36}\cdot 12 \\
&= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} \\
&= \frac{252}{36} = 7
\end{aligned}
$$

- Qual a esperança do tamanho do subproblema passado na primeira chamada recursiva do QuickSort?
  - a) $n/4$
  - b) $n/3$
  - c) $(n-1)/2$
  - d) $3n/4$
- Seja X o tamanho do subproblema.

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{1}{n}\cdot 0 + \frac{1}{n}\cdot 1 + \frac{1}{n}\cdot 2 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot (n-1) \\
&= \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n} \\
&= \frac{(n-1)(1+n-1)/2}{n} \\
&= \frac{n^2-n/2}{n} = \frac{n^2-n}{2}\cdot\frac{1}{n} \\
&= \frac{n-1}{2}
\end{aligned}
$$

Linearidade da Esperança

Lema

Sejam $X_1,\ldots,X_n$ variáveis aleatórias definidas em Ω. Então:

$$E\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[X_j\right]$$

- Vale mesmo quando as variáveis não são independentes!
- Exemplo: X_1 e X_2 são variáveis aleatórias que dizem o valor do primeiro e do segundo dado.

$$E[X_j] = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$$

- Qual o valor esperado para a soma de dois dados?

$$E[X] = E[X_1+X_2] = E[X_1]+E[X_2] = 3.5+3.5 = 7.$$