Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
- Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

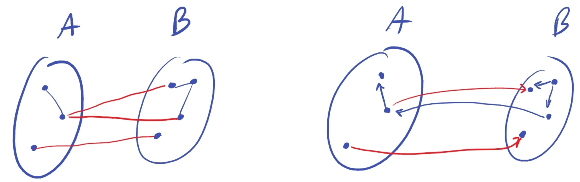
Corte Mínimo em Grafos

- Algoritmo Aleatorizado de Contração

Cortes em Grafos

Definição

Um corte de um Grafo $G = (V, E)$ é uma partição de V em dois conjuntos não vazios A e B.



Uma **aresta de corte** de um corte (A, B) são aquelas com

- um extremo em A e outro em B (em grafos não direcionados)
- com o inicio em A e o final em B (em grafos direcionados)

Cortes em Grafos

Quantos cortes (aproximadamente) um grafo com n vértices tem?

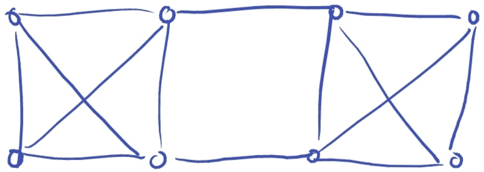
- n
- n^2
- 2^n
- n^n

O Problema do Corte Mínimo

Problema do Corte Mínimo

Dado um Grafo não direcionado $G = (V, E)$. Encontrar um corte com o menor número de arestas.

- O corte com o menor número de arestas em um grafo é o **corte mínimo**
- Arestas paralelas são permitidas.

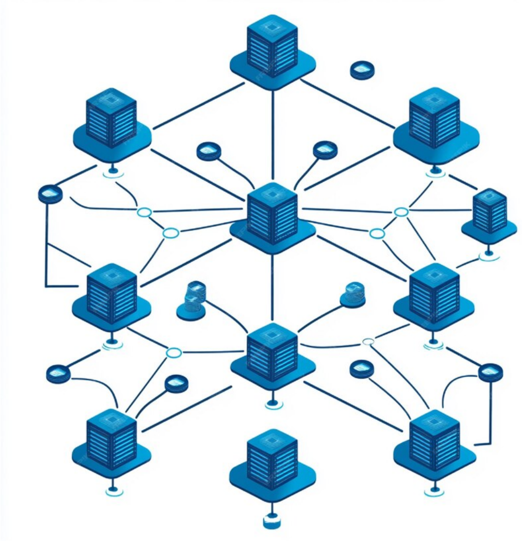


Quantas arestas de corte tem um corte mínimo no grafo acima?

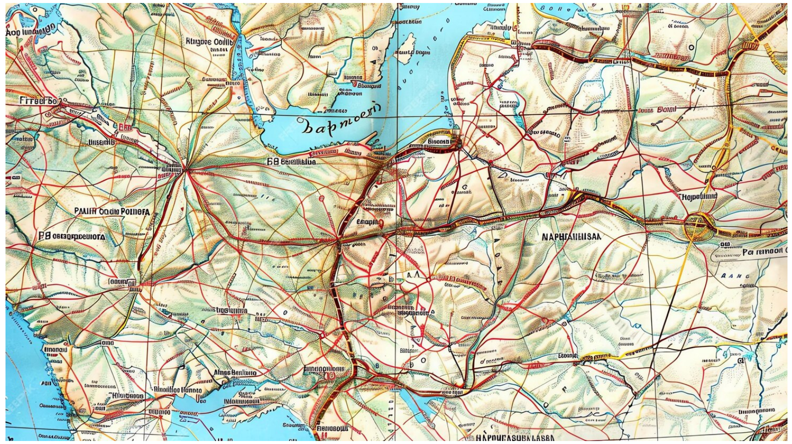
- 1
- 2
- 3
- 4

Cortes em Grafos

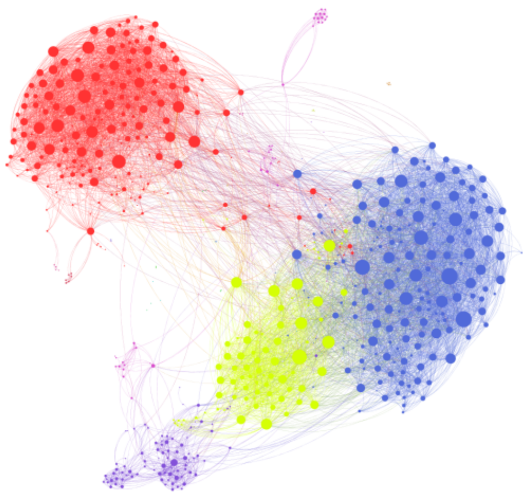
Aplicações



Suponha que você queira redundância na sua rede para que a falha em uma (ou duas, ou mais) arestas principais não desconecte sua rede.

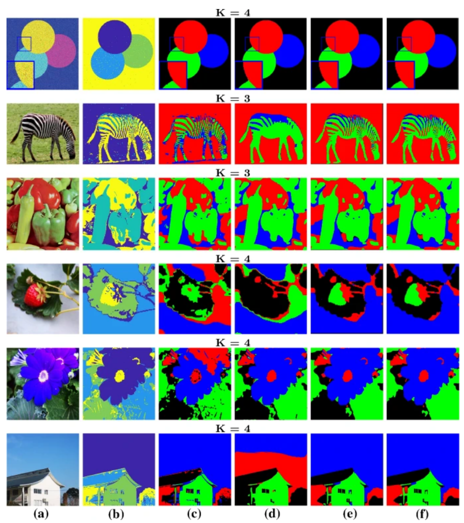


Ou suponha que você quer sabotar um inimigo bombardeando uma estrada desconectando suas cidades.



Detecção de comunidade em uma rede social. Grupos de usuários conectados entre si, mas com pouca conexão para o restante do grafo.

https://griffsgraphs.wordpress.com/2012/07/02/a-facebook-network/



Em reconhecimento de imagem, você pode entender cada pixel de uma imagem como um vértice com arestas para seus vizinhos, cada aresta com um peso de acordo com a semelhança dos dois pixels. Um corte minimo pode ser usado para encontrar objetos dentro da imagem.

Tai, XC., Deng, LJ. & Yin, K. A Multigrid Algorithm for Maxflow and Min-Cut Problems with Applications to Multiphase Image Segmentation. J Sci Comput 87, 101 (2021). https://doi.org/10.1007/s10915-021-01458-3

Algoritmo Aleatorizado de Contração

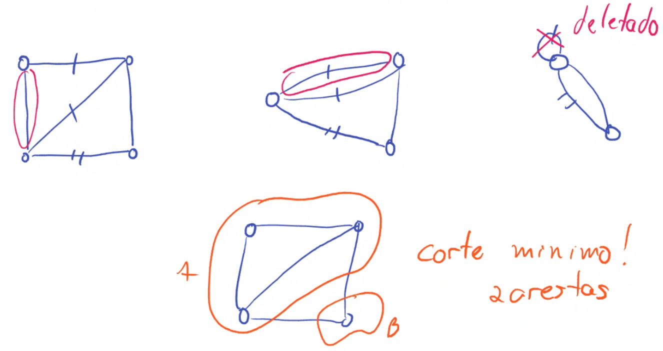
- Publicado por David Ron Karger, em 1993, quando aluno do Doutorado na Universidade de Stanford. (Hoje é professor no MIT)
- Ideia:

Algoritmo 1: Algoritmo Aleatorizado de Contração

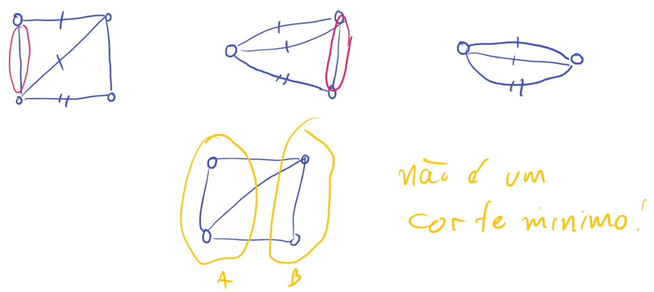
Entrada: Um Grafo G
Saída: Um Corte

```
enquanto houverem mais de 2 vértices faça
    escolha uma aresta aleatória {u, v} com probabilidade uniforme;
    fundir (contrair) u e v em um único vértice;
    remover auto-laços ;
devolva o corte representado pelos 2 vértices finais;
```


Exemplo - Execução



Exemplo - Execução2



- Algoritmo Aleatorizado de Contração as vezes encontra o corte mínimo, as vezes não.
- Será que um algoritmo assim é útil?
- A probabilidade de encontrar a resposta certa, é maior que zero, mas menos que 1. Mas qual será? 🤔

Revisão(zinha) de Probabilidade - parte2

Probabilidade Condicional

Na primeira revisão de probabilidade vimos:

- Espaço Amostral
- Eventos
- Variáveis Aleatórias
- Esperança
- Linearidade da Esperança

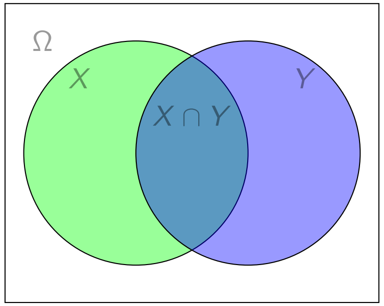
Hoje veremos:

- Probabilidade condicional
- Independência de Eventos e Variáveis Aleatórias

Probabilidade Condicional

Entender a probabilidade de um evento dado um segundo evento.

- Considere os eventos $X, Y \subseteq \Omega$.

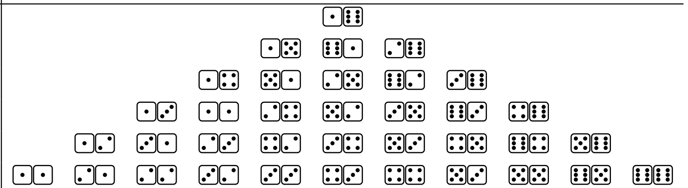


- Então a probabilidade de X dado Y é:

$$Pr[X|Y] = \frac{Pr[X \cap Y]}{Pr[Y]}$$

- Suponha que você jogue 2 dados, qual a probabilidade de pelo menos um dado ser 1 dado que a soma deles é 7?
  - 1/36
  - 1/6
  - 1/3
  - 1/2
- X = pelo menos um dado é um 1
- Y = a soma de dois dados é 7
- $Y = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
- $X \cap Y = \{(1,6),(6,1)\}$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S'											
$\lvert S' \rvert$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1



$$Pr[\text{um dado ser 1}|\text{a soma é sete}]$$
$$= \frac{Pr[\text{um dado ser 1 e a soma ser sete}]}{Pr[\text{soma ser sete}]}$$
$$= \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{36}\frac{36}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Independência de Eventos

Definição

Eventos $X, Y \subseteq \Omega$ são independentes se e somente se

$$Pr[X \cap Y] = Pr[X].Pr[Y]$$

- Uma definição equivalente é $P[X|Y] = Pr[X]$

Independência de Variáveis Aleatórias

Definição

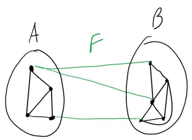
Variáveis aleatórias A e B definidas para um mesmo Ω são independentes se e somente os eventos $A = a$ e $B = b$ são independentes para todo a e b

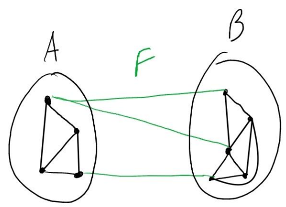
- Uma definição equivalente é $P[A = a \text{ e } B = b] = Pr[A = a] \cdot Pr[B = b]$
- Se as variáveis são independentes $E[A \cdot B] = E[A] \cdot E[B]$ (diferentemente da linearidade da esperança, essa propriedade só se aplica a variáveis independentes)

Algoritmo Aleatorizado de Contração

Qual a probabilidade de sucesso?

- Queremos encontrar um limitante inferior para essa probabilidade. Ou seja queremos mostrar que a probabilidade do algoritmo encontrar um Corte Mínimo não é menor do que um determinado valor.
- Considere um Grafo $G = (V, E)$ com n vértices e m arestas.
- Considere o corte mínimo (A, B), queremos encontrar esse corte! (Podem existir outros cortes mínimos, mas vamos considerar que estamos interessados somente nesse, já que queremos um limitante inferior)
- Seja F o conjunto de arestas de corte em (A, B) e $|F| = k$.





- Se uma aresta de F for escolhida durante o algoritmo, um vértice de A e um vértice de B serão fusionados, causando um corte diferente, e portanto o algoritmo falhará.
- Já se nas $n - 2$ iterações apenas arestas com os dois extremos em A ou os dois extremos em B forem selecionadas, o algoritmo vai ser bem sucedido.
- $Pr[\text{devolver } (A, B)] = Pr[\text{não contrair uma aresta de } F]$

- Queremos saber a probabilidade de nenhuma aresta em F ser contraída no algoritmo.
- Seja S_i o evento de que uma aresta de F foi contraída na iteração i
- Então $\neg S_i$ é o evento de nenhuma aresta de F ser contraída na iteração i
- A probabilidade do nosso algoritmo funcionar será:

$$Pr[\neg S_1 \cap \neg S_2 \cap \neg S_3 \cap \neg S_4 \cap \ldots \cap \neg S_{n-3} \cap \neg S_{n-2}]$$

- Qual é a probabilidade de uma aresta do corte (A, B) ser escolhida na primeira iteração? Sendo n o número de vértices, m o número de arestas e k o número de arestas do corte.
  - k/n
  - k/m
  - k/n^2
  - n/m
- Para as próximas iterações será complicado encontrar essa probabilidade em termos do número de arestas, pois o número de aresta varia de maneira imprevisível.
- Então será útil encontrar um limite para essa probabilidade em termos do número de vértices. Já que esse número se comporta bem: A cada iteração diminuímos em 1 o número de vértices.

Definição

O **grau** de um vértice v é o número de arestas incidentes em v. Normalmente denotado por $\delta(v)$.

- O grau de qualquer vértice em V é pelo menos k. (Do contrário $(\{v\}, V - \{v\})$ seria um corte melhor do que (A, B)).
- Note que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m$$

já que cada aresta contribui em 2 para a soma total dos graus.

$$m = \frac{\sum_{v \in V} \delta(v)}{2} \geq \frac{\sum_{v \in V} k}{2}$$
$$m \geq \frac{kn}{2}$$

Como $m \geq \frac{kn}{2}$, então:

$$Pr[S_1] = \frac{k}{m} \leq \frac{k}{kn/2} = k \cdot \frac{2}{kn} = \frac{2}{n}$$
$$Pr[S_1] \leq \frac{2}{n}$$

- Então a probabilidade do algoritmo falhar na primeira iteração é menor que $2/n$
- Note também que a probabilidade de não falhar é $Pr[\neg S_1] \geq \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{n-2}{n}$

- Queremos então saber a probabilidade do algoritmo não contrair uma aresta de F na segunda iteração dado que não contraiu na primeira, ou seja:
- Vejamos o complemento, a evento de contrair uma aresta de F na segunda iteração dado que não contraiu na primeira, ou seja:

$$Pr[S_2|\neg S_1] = \frac{k}{\text{num. arestas restantes}}$$

- Como cada nó restante é um corte, o grau de cada nó é $\geq k$. E portanto o número total de arestas é

$$\text{num. arestas restantes} \geq k(n-1)/2$$

- então

$$Pr[S_2|\neg S_1] \leq \frac{k}{k(n-1)/2} = \frac{2}{n-1}$$

- Para qualquer iteração i a probabilidade de eu contrair uma aresta de F dado que eu não o fiz nas iterações anteriores é análogo.

$$Pr\left[S_i|\bigcap_{j<i}\neg S_j\right] = \frac{k}{\text{num. arestas restantes}}$$

- Como cada nó restante também é um corte, o grau de cada nó é $\geq k$, o número total de nós é $n-i+1$. E portanto o número total de arestas é

$$\text{num. arestas restantes} \geq k(n-i+1)/2$$

- então

$$Pr\left[S_i|\bigcap_{j<i}\neg S_j\right] \leq \frac{k}{k(n-i+1)/2} = \frac{2}{n-i+1}$$

$$Pr\left[S_i|\bigcap_{j<i}\neg S_j\right] \leq \frac{2}{n-i+1}$$

- Dessa forma a probabilidade de **Não** contrair uma aresta de F na iteração i dado que também não contraiu nas anteriores é

$$Pr\left[\neg S_i|\bigcap_{j<i}\neg S_j\right] \geq 1 - \frac{2}{n-i+1} = \frac{n-i+1-2}{n-i+1} = \frac{n-i-1}{n-i+1}$$

$$\boxed{Pr[\neg S_1 \cap \neg S_2 \cap \neg S_3 \cap \neg S_4 \cap \ldots \cap \neg S_{n-3} \cap \neg S_{n-2}]}$$

$$Pr[\neg S_1] \cdot Pr[\neg S_2|\neg S_1] \cdot Pr[\neg S_3|\neg S_1 \cap \neg S_2] \cdot Pr[\neg S_4|\neg S_1 \cap \neg S_2 \cap \neg S_3] \ldots$$
$$\ldots Pr[\neg S_{n-3}|\neg S_1 \cap \ldots \cap \neg S_{n-2}] \cdot Pr[\neg S_{n-2}|\neg S_1 \cap \ldots \cap \neg S_{n-3}]$$

$$\geq \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-3} \cdots \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \cdot \frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}} \cdot \frac{\cancel{n-5}}{\cancel{n-3}} \cdots \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n^2-n}$$
$$= \frac{2}{n^2-n} \geq \frac{2}{2n^2-n} \geq \frac{2}{2n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{Pr[\neg S_1 \cap \neg S_2 \cap \neg S_3 \cap \neg S_4 \cap \ldots \cap \neg S_{n-3} \cap \neg S_{n-2}] \geq \frac{1}{n^2}}$$

$$Pr[\neg S_1 \cap \neg S_2 \cap \neg S_3 \cap \neg S_4 \cap \ldots \cap \neg S_{n-3} \cap \neg S_{n-2}] \geq \frac{1}{n^2}$$

- Então a probabilidade do algoritmo funcionar é... muito baixa!
- PORÉM!!! Veja bem. Se você pegasse um corte aleatório a probabilidade dele ser o (A, B) é $\frac{1}{2^n}$

n	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{n^2}$
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{25}$
10	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{100}$
100	$\frac{1}{1267650600228229401496703205376}$	$\frac{1}{10000}$

- Podemos fazer um truque para melhorar essa probabilidade. Basta executar o algoritmo várias vezes!

Múltiplas Execuções

- Iremos executar o algoritmo N vezes, e devolver o menor corte encontrado.
- Quantas execuções serão necessárias?
- Seja T_j o evento de que o corte (A, B) seja encontrado na j-ésima tentativa. T_j são independentes.

$$Pr[\text{falhar nas } N \text{ tentativas}] = Pr[\neg T_1 \cap \ldots \cap \neg T_N]$$

$$(ind.) = \prod_{j=1}^{N} Pr[\neg T_j] \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^N$$

$$Pr[\text{falhar nas } N \text{ tentativas}] \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^N$$

- Para qualquer numero real x, $1 + x \leq e^x$

$$\begin{aligned} Pr[\text{falhar nas } N \text{ tentativas}] &\leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^N \\ &\leq \left(e^{-1/n^2}\right)^N \\ &= e^{-N/n^2} \\ &= \frac{1}{e^{N/n^2}} \end{aligned}$$

- Para $N = n^2$

$$Pr[\text{falhar nas } n^2 \text{ tentativas}] \leq \frac{1}{e} \approx 37\%$$

- Para $N = n^2 \ln n$

$$Pr[\text{falhar nas } n^2 \ln n \text{ tentativas}] \leq \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$$