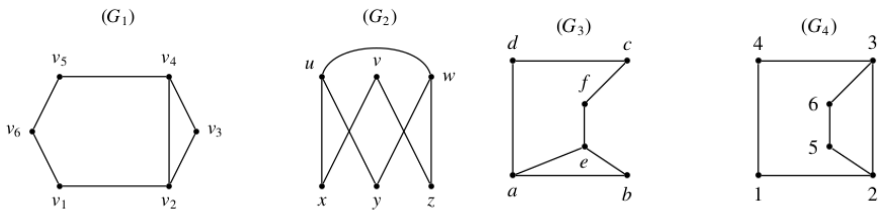
Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Isomorfismos de grafos



- Observe os grafos G_1, G_2 e G_3 tem a mesma estrutura, diferindo apenas nos "nomes" dos vértices e das arestas, e na maneira como estão desenhados; enquanto que o grafo G_4 tem uma estrutura diferente. (Por exemplo, G_4 é o único que tem um circuito de comprimento 4.)

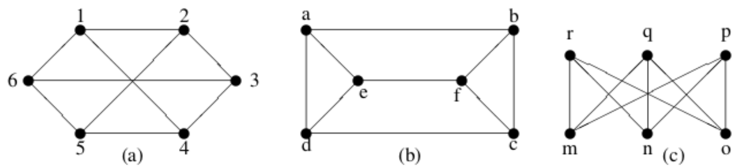
Isomorfismos de grafos

- Dizemos que dois grafos G e H são **isomorfos** se existem bijeções $f : V_G \to V_H$ e $g : E_G \to E_H$ tais que um vértice v é extremo de uma aresta e no grafo G se e somente se $f(v)$ é extremo da aresta $g(e)$ no grafo H.
- No caso de grafos orientados, a direção da aresta tem que ser preservada também: a aresta e entra no (resp. sai do) vértice v em G se e somente se $g(e)$ entra em (resp. sai de) $f(v)$.
- Ou seja, as funções f e g preservam as relações de incidências entre vértices e arestas. Se os grafos são simples, é suficiente que exista uma função bijetora $f : V_G \to V_H$ que preserva as adjacências dos vértices. Se G e H são o mesmo grafo, dizemos que f é um **automorfismo** de G.

Isomorfismos de grafos

- Escrevemos $G \cong H$ para indicar que G e H são isomorfos. Quando isto ocorre, qualquer propriedade de G que pode ser definida apenas em termos de incidências também será uma propriedade de H. Por esta razão, isomorfismo é um dos conceitos mais importantes da teoria dos grafos.

Exercício: Os grafos abaixo são isomorfos? Relacione-os dois a dois. Demonstre que são isomorfos, se o forem; caso contrário justifique porque não o são.



- Dados dois grafos G e H, com $V_G = V_H = n$, verificar se G e H são isomorfos é um problema difícil.
- Uma maneira é na força bruta, ou seja analisar todas as $n!$ bijeções de V_G para V_H e verificar se alguma delas satisfaz a condição de isomorfismo.
- Há algoritmos mais eficientes, mas todos os métodos conhecidos podem demorar demais em certos casos, mesmo para grafos relativamente pequenos.
- O isomorfismo é uma relação de equivalência entre grafos. Uma classe de equivalência desta relação é o conjunto de todos os grafos que tem um determinado diagrama (isto é, uma determinada estrutura) , independentemente dos "rótulos" dos vértices e das arestas.

- Pode-se verificar que todos os grafos simples completos com n vértices são isomorfos entre si. Portanto, para cada natural n, existe apenas um grafo não rotulado completo com n vértices, que é geralmente denotado por K_n.

Conexidade

em grafos não orientados

- Seja $G = (V, E)$ um grafo não orientado, Dizemos que um vértice $u \in V$ está **conectado** ou **ligado** em G a um vértice $v \in V$ se e somente se existe um passeio em G com início u e término v. Isto equivale a dizer que existe um caminho em G de u para v.
- Dizemos que um grafo é **conexo** se ele não é vazio e quaisquer dois de seus vértices são conectados.

- As **componentes** (**conexas**) de um grafo G são os subgrafos conexos de G que são maximais na relação "⊆" ("é subgrafo de"). Uma propriedade importante das componentes é a seguinte:
  Teorema: Um subgrafo H de um grafo não orientado G é uma componente conexa de G se e somente se H é conexo, e toda aresta de E_G que tem um extremo em V_H está em E_H (e portanto tem os dois extremos em V_H).
- Esse teorema implica que cada componente de um grafo G é essencialmente um grafo independente, sem interseção ou ligação com as outras componentes.
- Observe que um grafo é conexo se e somente se ele tem exatamente uma componente conexa. Em particular, o grafo vazio não é conexo. Alguns autores usam o termo **desconexo** para um grafo com duas ou mais componentes. Um grafo sem arestas é dito **totalmente desconexo**.

- Seja e uma aresta de um grafo G. O grafo $G \setminus \{e\}$ ou tem o mesmo número de componentes conexas que G, ou tem uma componente a mais.
- No segundo, caso dizemos que a aresta e é uma **aresta de corte**.
- Observe que, se retirarmos uma aresta de corte de um grafo conexo, obtemos um grafo desconexo.

Exercício: Prove que, em qualquer grafo não orientado G, a relação "está conectado a" é uma relação de equivalência.

Conexidade
em grafos orientados

- Um grafo orientado G é **fortemente conexo** se, para quaisquer dois vértices $u, v \in V$, existe um passeio orientado de u para v e de v para u.
- Isto equivale a dizer que existe um caminho orientado de u para v e de v para u.
- Um subgrafo fortemente conexos de um grafo orientado G que não está contido em nenhum outro subgrafo fortemente conexo de G é, por definição, uma **componente fortemente conexa** de G.
- Isto é, as componentes fortemente conexas de G são os subgrafos fortemente conexos de G que são maximais sob "⊆".

- Ao contrário do que ocorre em grafos não orientados, uma componente fortemente conexa H de um grafo G não é necessariamente "isolada" das outras componentes.
- Pode existir uma (ou mais) aresta e de G que não está em E_H mas tem origem ou destino em V_H. (Nesse caso é fácil provar que o outro extremo de e não está em V_H.)

Árvores

- Uma **árvore** é um grafo conexo acíclico.
- Árvores são muito importantes, em computação e em outras áreas, e tem inúmeras propriedades interessantes.
- Por exemplo, a maneira mais econômica de interligar um conjunto de computadores e **switches** por cabos é formando uma árvore.
- Observe que uma árvore é necessariamente um grafo simples.

Teorema: Em uma árvore quaisquer dois vértices são ligados por um único caminho.
Corolário: Toda aresta de uma árvore é uma aresta de corte.
Teorema: Seja G uma árvore com n vértices e m arestas, então $m = n - 1$.

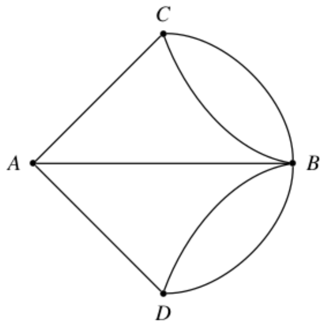
Grafos bipartidos

- Seja $G = (V, E, F)$ um grafo.
- Uma **bipartição** de V é um par não ordenado de subconjuntos A e B de V, tais que $A \cup B = V$ e $A \cap B = \emptyset$ e toda aresta do grafo tem um extremo em A e o outro em B.
- Um grafo G com uma bipartição $A,\ B$ é chamado um **grafo bipartido**.

- Um **grafo bipartido completo** é um grafo bipartido no qual todo vértice de A é adjacente a todo vértice de B.
- Verifica-se que uma condição necessária e suficiente para que um grafo $G = (V, E, F)$ tenha uma bipartição é que ele não possua ciclos de comprimento ímpar.
- Para cada par de números naturais m e n, existe apenas um grafo não rotulado bipartido completo cuja bipartição tem m vértices em um conjunto e n vértices no outro. Esse grafo não rotulado é geralmente denotado por $K_{m,n}$.

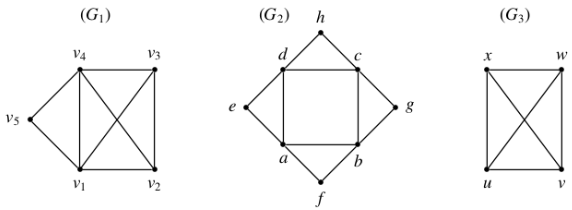
Grafos eulerianos

- Para mostrar que o problema das pontes de Königsberg não tem solução, Euler primeiro modelou o mapa da cidade por um grafo G não orientado.
- Neste modelo, o problema pede um passeio no grafo G que atravessa exatamente uma vez cada aresta de E, ou seja, uma trilha que atravessa por todas as arestas.
- Uma trilha com esta propriedade é chamada de **trilha euleriana** ou **trilha de Euler** do grafo G. Se a trilha é fechada ela é chamada de **tour euleriano** ou **tour de Euler**. Um grafo é dito **euleriano** se ele contém um tour de Euler.



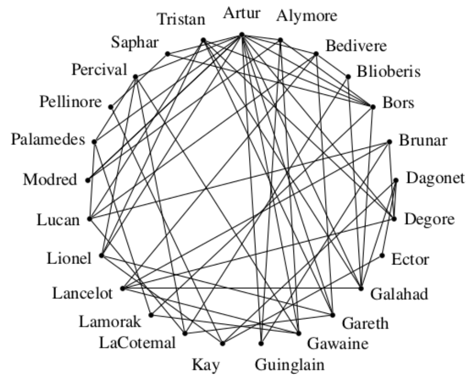
- No seu artigo de 1736, Euler fez mais do que resolver o problema da cidade de Königsberg.
- Ele encontrou uma condição necessária e suficiente para que um grafo qualquer G tenha um tour euleriano:
  Teorema: Um grafo conexo tem um tour de Euler se e somente se ele não tem vértices de grau ímpar.

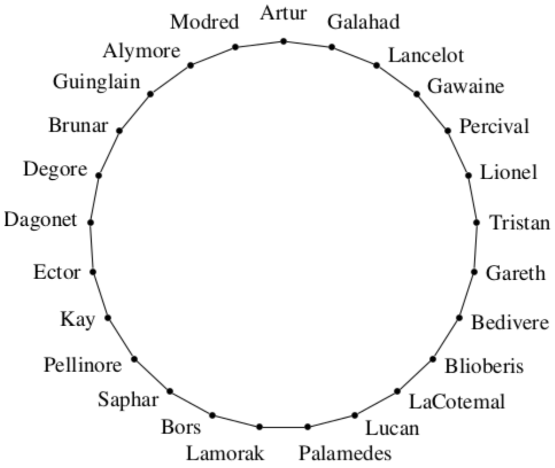
- Outro quebra-cabeças clássico que recai no mesmo problema de grafos é desenhar cada um dos diagramas abaixo sem levantar o lápis do papel e sem traçar duas vezes a mesma linha.
- Cada desenho pode ser modelado por um grafo G, onde os vértices são os extremos isolados de linhas ou pontos onde três ou mais linhas se encontram, e as arestas são as linhas ligando esses pontos.
- Nesse caso, o que se pede é uma **trilha euleriana**, uma trilha (não necessariamente fechada) que passa por todas as arestas de G. O seguinte teorema é um corolário do teorema de Euler:
  Corolário: Um grafo conexo tem uma trilha de Euler se, e somente se, ele tem no máximo dois vértices de grau ímpar.



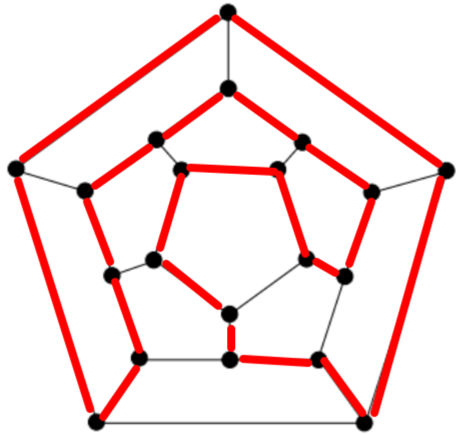
Grafos hamiltonianos

- Considere o seguinte quebra-cabeças: o Rei Artur precisa designar os assentos para seus 24 Cavaleiros em volta da Távola Redonda.
- Mas nem todos eles são amigos; e é importante que cada cavaleiro seja colocado entre dois de seus amigos.
- Podemos descrever as relações de amizade como um grafo simples G onde os vértices são os Cavaleiros e existe uma aresta entre dois Cavaleiros se eles são amigos (e portanto podem sentar lado a lado).





- Um circuito com essas propriedades é chamado de **circuito hamiltoniano** do grafo G.
- Este nome homenageia o matemático irlandês William Rowland Hamilton (1805–1861).
- Em 1856 ele descreveu, em uma carta a um colega, um jogo para duas pessoas derivado do dodecaedro.
- Nesse jogo, uma pessoa escolhe um caminho P qualquer de cinco vértices no grafo G, e a outra deve encontrar um circuito em G que começa com P e passa por todos os vértices.



- Um grafo que possui pelo menos um circuito hamiltoniano é chamado de **grafo hamiltoniano**.
- Há vários argumentos que podem ser usados para demonstrar que um grafo não é hamiltoniano.
- Por exemplo, se G tem um vértice de grau 1, então G não é hamiltoniano. No exemplo da figura (c), pode-se ver que qualquer passeio que visite os vértices u e v deve repetir a aresta a, e portanto não pode ser um circuito.
- No exemplo da figura (d), pode-se observar que os cinco vértices brancos e os seis vértices pretos formam uma bipartição A, B de G. Como os dois conjuntos tem cardinalidades diferentes, podemos concluir que não há circuito que passe por todos os vértices.

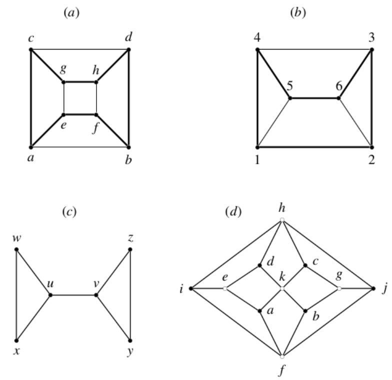


Figura 13.19: (*a*) e (*b*) grafos hamiltonianos e (*c*) e (*d*) grafos não hamiltonianos.