Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Probabilidade

- A lógica é uma ferramenta essencial pois nos permite deduzir o valor lógico de proposições complexas a partir dos valores lógicos de suas proposições e predicados elementares.
- Porém, para usá-la precisamos saber se as proposições e predicados são verdadeiros ou falsos.
- Na vida real, é raro sabermos com certeza se uma afirmação é verdadeira ou não.
- Como podemos então usar a lógica, ou tomar qualquer decisão, nessas condições?
- Além disso, há afirmações sobre as quais temos muito mais confiança do que outras.
- Podemos tratar a frase “ontem choveu na minha rua” como verdadeira, com confiança quase absoluta, se estávamos lá ontem.
- Por outro lado, se a previsão do tempo diz que “não vai chover manhã”, é prudente pensar na possibilidade de que chova.

- Para algumas proposições, nossa confiança pode se dividir igualmente entre as duas possibilidades.
- Alguém jogou uma moeda ao ar e ela caiu onde não podemos ver. Será que o resultado foi cara, ou coroa? Nossa experiência com moedas nos diz que às vezes o resultado é um e as vezes é outro.
- Da mesma forma, quando atiramos um dado, nossa experiência diz apenas que o resultado pode ser qualquer número entre 1 e 6, e que parece não haver diferença entre eles.
- Por essa experiência, a afirmação “o resultado será 3” merece tanta confiança quanto “o resultado será 5”.
- Na verdade, jogos de azar como dados e cara-ou-coroa baseiam-se inteiramente no fato de que todos resultados possíveis são igualmente plausíveis.

- Por outro lado, mesmo nesses jogos há afirmações que merecem mais confiança do que outras.
- Quando atiramos um dado, a afirmação “o resultado será 3” deve nos parecer menos plausível do que “o resultado será diferente de 3”.
- Esta confiança pode vir da experiência, mas também por raciocínio: se todos os 6 resultados tem chances iguais de acontecer, então o resultado 3 deve ter menos chances do que os outros cinco juntos.
- A teoria da probabilidade surgiu para formalizar este tipo de raciocínio, que tem o mesmo objetivo da lógica clássica — ajudar-nos a pensar e decidir — mas lida com graus de confiança, em vez de certezas absolutas.

Definição

- Nesta teoria, cada proposição P tem uma **probabilidade**: um valor real entre 0 e 1, que mede o grau de confiança ou expectativa que temos de que a proposição seja verdadeira.
- Denotaremos esse número por $\Pr(P)$.
- Probabilidade 1 significa que temos certeza absoluta de que a afirmação P é verdadeira.
- Probabilidade 0 significa que temos certeza absoluta que é falsa. O valor $1/2$ significa que não sabemos se P é falsa ou verdadeira, e que qualquer das duas possibilidades nos parece igualmente provável.
- Assim, por exemplo, quando vamos jogar uma moeda, podemos atribuir probabilidade $1/2$ à afirmação “o resultado será cara”.
- Uma probabilidade mais próxima de 1 significa que não temos certeza, mas acreditamos que é mais provável que a afirmação P seja verdadeira do que ela seja falsa.

- Na teoria da probabilidade, toda proposição P em tese continua tendo um valor lógico “verdadeiro” ou “falso”, mas a teoria não exige que esse valor seja conhecido.
- A probabilidade da afirmação reflete justamente nosso grau de conhecimento.
- Se conhecemos o valor lógico da afirmação devemos atribuir a ela probabilidade 0 ou 1.
- Neste caso, como veremos, a teoria da probabilidade se reduz à lógica clássica.
- As probabilidades são frequentemente expressas em percentagens. Assim, tanto faz dizer que uma probabilidade é 25% ou $25/100 = 0,25$.

Distribuição uniforme

- Em geral, quando temos n alternativas possíveis para uma situação qualquer, e não temos nenhuma informação, experiência ou raciocínio que justifique atribuir probabilidade maior a uma algumas do que outras, é razoável atribuir probabilidade $1/n$ a cada alternativa.
- Neste caso dizemos que essas alternativas tem uma **distribuição uniforme** de probabilidade.
- Um exemplo de distribuição uniforme é o sorteio de um item entre n outros. Para que o sorteio seja justo é importante que ele seja feito de modo que cada item tenha a mesma probabilidade de ser escolhido.
- Neste caso dizemos que a escolha é **perfeitamente aleatória**.
- Esse conceito é importante em muitos jogos "de azar", como cara-ou-coroa, palitinho, par-ou-ímpar, dados, roletas, baralhos, etc..

- Esses jogos dependem de dispositivos ou ações que podem dar dois ou mais resultados distintos. Para que o jogo seja justo, é essencial que os jogadores não tenham nenhum conhecimento prévio sobre o resultado, de modo que todos atribuam uma distribuição uniforme de probabilidade ao mesmo.
- Por outro lado, é importante observar que a teoria não diz como atribuir as probabilidades de afirmações elementares, mas apenas como combiná-las para obter as probabilidades de afirmações compostas.
- É importante notar que as probabilidades dependem do observador: se um jogador troca o dado "honesto" por um viciado, ele pode (e deve) atribuir probabilidades diferentes a cada número.

Princípio da exclusão mútua

- Intuitivamente, parece pouco razoável termos confiança ao mesmo tempo em duas afirmações contraditórias.
- Na teoria da probabilidade, essa intuição é formalizada pelo **princípio da exclusão mútua**, ou **aditividade**: se duas proposições P e Q não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo (isto é, $P \to \neg Q$ e $Q \to \neg P$), então devemos ter $\Pr(P) + \Pr(Q) \leq 1$.
- Por exemplo, considere as afirmações "o Diretor está agora em São Paulo" e "o Diretor está agora no Rio de Janeiro".
- Quaisquer que sejam as informações que temos a respeito do paradeiro do Diretor, não faz sentido atribuir probabilidade 0,75 para a primeira e 0,80 para a segunda, pois se uma delas for verdadeira, a outra não é.
- Essa regra pode ser generalizada para três ou mais proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Essas proposições são **mutuamente exclusivas** se sabemos que $P_i \to \neg P_j$, para quaisquer i e j entre 1 e n com $i \neq j$.
- Nesse caso, o princípio da exclusão mútua exige que $\Pr(P_1) + \Pr(P_2) + \cdots + \Pr(P_n) \leq 1$.

Princípio da exaustão

- Por outro lado, se sabemos que pelo menos uma dentre duas afirmações é verdadeira, não é razoável termos pouca confiança nas duas afirmações. Por exemplo, não é razoável não acreditar nem na afirmação "o lucro será maior que R\$ 10.000" nem na afirmação "o lucro será menor que R\$ 20.000", pois pelo menos uma dessas afirmações com certeza é verdadeira.
- Na teoria da probabilidade, essa regra é formalizada pelo **princípio da exaustão**: se sabemos que $P \vee Q$ é verdadeiro, então devemos ter $\Pr(P) + \Pr(Q) \geq 1$. No exemplo acima, podemos atribuir probabilidade $1/2$ ou $3/4$ para ambas, mas não $1/4$; se atribuirmos probabilidade $0,30$ para a primeira, podemos atribuir $0,80$ para a segunda, mas não $0,50$.
- Mais geralmente se sabemos que $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$ é verdadeiro, então devemos ter $\Pr(P_1) + \Pr(P_2) + \cdots + \Pr(P_n) \geq 1$.

Princípio da complementaridade

- Juntando o princípio da exclusão e da exaustão, podemos concluir que se uma afirmação P é o oposto lógico (negação) da afirmação Q, então a soma das probabilidades deve ser exatamente 1. Ou seja, para qualquer afirmação P, temos
$$\Pr(P) + \Pr(\neg P) = 1 \tag{1}$$
ou seja
$$\Pr(\neg P) = 1 - \Pr(P) \tag{2}$$
- Por exemplo, se a probabilidade de "vai chover amanhã" é $3/4$, a probabilidade de "não vai chover amanhã" tem que ser $1/4$. Esta regra é conhecida como o **princípio da complementaridade**.

- Esta regra também pode ser generalizada para três ou mais afirmações. Suponha que sabemos que exatamente uma das afirmações $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é verdadeira. Isto é, sabemos que elas são mutuamente exclusivas, mas também que uma delas tem que ser verdadeira.
- Então devemos ter
$$\Pr(P_1) + \Pr(P_2) + \cdots + \Pr(P_n) = 1 \tag{3}$$
- Por exemplo, suponha que alguém escolheu e retirou uma carta de um baralho comum.
- Considere as afirmações "a carta é ouros", "a carta é copas", "a carta é paus", "a carta é espadas", ou "a carta é um coringa". Como a carta só pode ser de um tipo, e tem que ser de um desses cinco tipos, então as probabilidades dessas afirmações devem somar 1.
- Observe que este princípio é respeitado quando atribuímos probabilidade $1/n$ para n alternativas igualmente prováveis.

Princípio da exclusão e inclusão

- Os princípios acima podem ser vistos como corolários de um princípio mais geral: para quaisquer afirmações P e Q, devemos ter
$$\Pr(P \vee Q) = \Pr(P) + \Pr(Q) - \Pr(P \wedge Q) \tag{4}$$
- Compare este princípio com a fórmula para cardinalidade de conjuntos
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{5}$$

Exercício: Contagens em uma fábrica mostraram que 5% dos parafusos tem um defeito na rosca, 4% tem um defeito na cabeça, e 2% tem um defeito em ambas as partes. Qual é a probabilidade de que um desses parafusos, escolhido ao acaso, tenha algum defeito?