Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Relações de ordem e equivalência

Relações de ordem

Definição: Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto A é uma **relação de ordem** se ela é reflexiva sobre A, anti-simétrica e transitiva.

Exemplo: Sejam $A = \mathbb{R}$ e $\mathcal{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x \leq y \}$.

- $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre A pois $(\forall x \in \mathbb{R})\, x \leq x$ logo $(\forall x \in \mathbb{R})\, x\mathcal{R}x$.

$\mathcal{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x \leq y \}$.

- $\mathcal{R}$ é transitiva pois $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\,((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z))$. Portanto

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\,(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \to x\mathcal{R}z.$$

- $\mathcal{R}$ é anti-simétrica pois $(\forall x, y \in \mathbb{R})\,(x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y$. Portanto

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\,(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \to x = y.$$

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre um conjunto A, o par $(A, \mathcal{R})$ é chamado um **conjunto ordenado**. Por exemplo, $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto ordenado (entendendo-se que '$\leq$' aqui é a restrição da relação "menor ou igual" aos números naturais). Outro exemplo de conjunto ordenado é $(\mathbb{P}(A), \subseteq)$, para qualquer conjunto A.

Relações de ordem estrita

Definição: Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto A é uma **relação de ordem estrita** se ela é irreflexiva sobre A, anti-simétrica e transitiva.

Exemplo: Sejam $A = \mathbb{R}$ e $\mathcal{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x < y \}$.

- $\mathcal{R}$ é irreflexiva sobre A pois $(\forall x \in \mathbb{R})\,\neg(x < x)$ logo $(\forall x \in \mathbb{R})\, x \not\mathcal{R} x$.

$\mathcal{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x < y \}$.

- $\mathcal{R}$ é transitiva pois $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\,((x < y \wedge y < z) \to x < z))$. Portanto

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\,(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \to x\mathcal{R}z.$$

- $\mathcal{R}$ é anti-simétrica, pois $(\forall x, y \in \mathbb{R})\,\neg((x < y \wedge y < x)$. Portanto, por vacuidade,

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\,(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \to x = y.$$

- Note que uma relação de ordem estrita não é um tipo particular de relação de ordem.
- Porém, toda relação de ordem estrita $\mathcal{R}$ pode ser obtida de uma relação de ordem $\mathcal{S}$ excluindo-se todos os pares da forma (a, a).
- Reciprocamente, toda relação de ordem $\mathcal{S}$ sobre um conjunto A é a união $\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_A$ onde $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem estrita sobre A.

- Seja $\mathcal{R}$ relação de ordem estrita e $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \mathcal{I}_A$
- Note que, para quaisquer $a, b \in A$

$$a\mathcal{R}b \leftrightarrow (a\mathcal{S}b \wedge a \neq b)$$

$$a\mathcal{S}b \leftrightarrow (a\mathcal{R}b \vee a = b)$$

- Dizemos que $\mathcal{R}$ é a **ordem estrita associada à ordem** $\mathcal{S}$, e vice-versa.

Ordem total

Definição: Uma relação $\mathcal{R}$ é uma **ordem total** sobre um conjunto A (ou **ordem linear**) se, e somente se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre A e quaisquer dois elementos de A são comparáveis por $\mathcal{R}$.

Portanto uma relação de ordem $\mathcal{R}$ é total se, quaisquer que sejam a e b em A, $(a, b) \in \mathcal{R}$ ou $(b, a) \in \mathcal{R}$. Se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total sobre A, o par $(A, \mathcal{R})$ é chamado de **conjunto totalmente ordenado**.

Exemplo: A relação $\leq$ é uma ordem total sobre $\mathbb{R}$, pois $(\forall a, b \in \mathbb{R})\, a \leq b \vee b \leq a$.

A relação $\subseteq$ não é uma ordem total quando A tem pelo menos dois elementos, pois nesse caso existem subconjuntos distintos X e Y em $\mathbb{P}(A)$

Ordem lexicográfica

- Uma ordem muito importante no dia a dia, e em computação, é a **ordem alfabética** definida sobre palavras, nomes, etc.. Por exemplo, nesta ordem "`hoje`" vem antes de "`ontem`", "`biscoito`" vem antes de "`bolacha`", "`porco`" vem antes de `porta`", e "`sol`" vem antes de "`soldado`".

- Observe que esta ordem é baseada na ordem tradicional das letras do alfabeto: `a`, `b`, `c`, ..., `z`.
- Compara-se a primeira letra de uma com a primeira letra da outra. Se forem diferentes, a ordem das palavras é a mesma das letras.
- Se as palavras começam com a mesma letra, compara-se a segunda letra de uma com a segunda da outra.

- Se persistir o empate, consideram-se as terceiras letras, as quartas letras, e assim por diante — até haver um desempate (letras diferentes na mesma posição das duas palavras), ou uma das palavras terminar. Neste último caso (como no exemplo de "`sol`" e "`soldado`"), convenciona-se que a palavra que termina primeiro vem antes da outra.

- Relação $\leq_2$ definida sobre os pares $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pela fórmula

$$(a_1, a_2) \leq_2 (b_1, b_2) \leftrightarrow (a_1 < b_1) \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$$

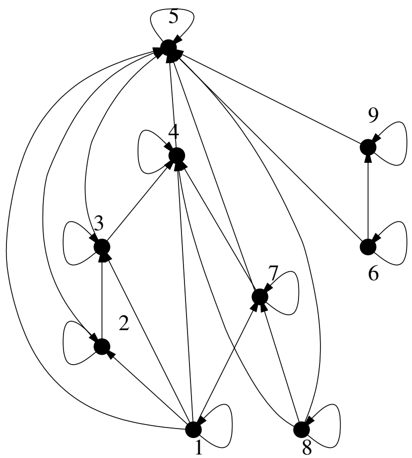
Diagrama de Hasse

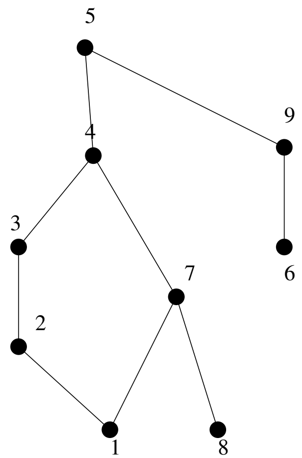
Podemos representar graficamente um conjunto ordenado $(A, \mathcal{R})$, onde A é finito e não muito grande, por um diagrama de pontos e linhas, chamado **diagrama de Hasse** (em homenagem ao matemático alemão Helmut Hasse, 1898–1979).

- cada elemento de A é representado por um ponto do plano, com posição arbitrária,
- exceto pela regra de que, para todo par $(a, b) \in \mathcal{R}$ com $a, b \in A$ e $a \neq b$, o ponto que representa a deve estar abaixo do ponto que representa b
- Cada um desses pares é representado por uma linha reta ligando a com b, exceto que pares que podem ser deduzidos por transitividade não são desenhados.

Para ilustrar a construção, vamos usar o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e a relação sobre A:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} = \{ \; & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,7), \\
& (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), \\
& (3,3), (3,4), (3,5), \\
& (4,4), (4,5), \\
& (5,5), \\
& (6,6), (6,9), (6,5), \\
& (7,7), (7,4), (7,5), \\
& (8,8), (8,7), (8,4), (8,5), \\
& (9,9), (9,5) \; \}
\end{aligned}
$$





Elementos mínimos e máximos

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem sobre um conjunto X, e A um subconjunto de X. Um **elemento mínimo de A sob $\mathcal{R}$** é um elemento $m \in A$ se $(m, a) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$.

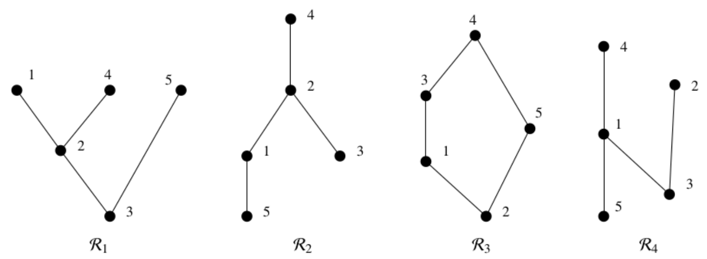
Exemplo: Considere o conjunto de conjuntos

$$A = \{\{1,2,4\},\{2,4\},\{2,3,4\},\{2,4,5\},\{2,3,4,6\}\}$$

e seja $\mathcal{R}$ a relação "$\subseteq$" entre conjuntos. O elemento $\{2,4\}$ de A é mínimo sob $\mathcal{R}$, pois $\{2,4\} \subseteq b$ para todo conjunto $b \in A$.

Um elemento m de A é **máximo** sob uma relação $\mathcal{R}$ se $(a, m) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$.

No diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$, o elemento mínimo existe se há um único ponto no diagrama a partir do qual é possível alcançar qualquer outro ponto por uma sequência de linhas, todas elas percorridas no sentido de baixo para cima. O elemento máximo, se existe, pode ser identificado de maneira análoga, isto é, se a partir dele podemos alcançar qualquer outro ponto percorrendo uma sequência de linhas no sentido descendente.



Diagramas de Hasse sobre o conjunto $\{1,2,3,4,5\}$. Na relação $\mathcal{R}_1$, mínimo: 3, máximo: não há. Na relação $\mathcal{R}_2$, mínimo: não há, máximo: 4. Na relação $\mathcal{R}_3$, mínimo: 2, máximo: 4. Na relação $\mathcal{R}_4$, mínimo: não há, máximo: não há.

Elementos minimais e maximais

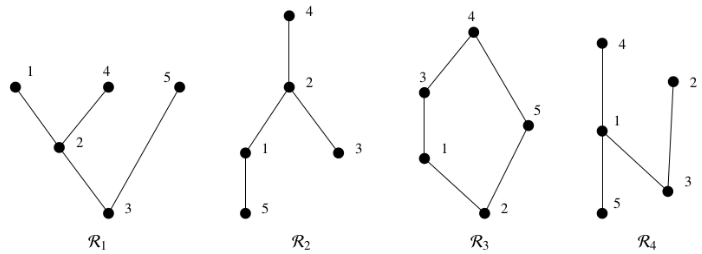
Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem sobre um conjunto X, e A um subconjunto de X. Um **elemento minimal de A sob $\mathcal{R}$** é um elemento $m \in A$ tal que não existe nenhum $a \in A$, diferente de m, com $(a, m) \in \mathcal{R}$.

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3), (1,4), (4,4), (2,4), (3,4), (5,5), (5,6), (6,6)\}.$$

O inteiro 2, por exemplo, é um elemento minimal de A sob $\mathcal{R}$, pois não existe nenhum par $(a, 2)$ na relação. Os elementos minimais de A sob $\mathcal{R}$ são 1, 2, e 5.

Um **elemento maximal de A sob $\mathcal{R}$** é um elemento m de A tal que não existe nenhum a em A, diferente de m, tal que $(m, a) \in \mathcal{R}$.



Na relação $\mathcal{R}_1$, minimal: 3, maximais: 1, 4 e 5. Na relação $\mathcal{R}_2$, minimais: 3, 5, maximal: 4. Na relação $\mathcal{R}_3$, minimal: 2, maximal: 4. Na relação $\mathcal{R}_4$, minimais: 3 e 5, maximais: 2 e 4.

Os conceitos de minimal e maximal são muito usados quando A é um conjunto de conjuntos, e $\mathcal{R}$ é a relação '$\subseteq$'. Neste caso, um elemento minimal de A é um conjunto que não contém propriamente nenhum outro elemento de A. Por exemplo, seja

$$A = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,4\}, \{3,4,5\}\}$$

$$A = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,4\}, \{3,4,5\}\}$$

Neste conjunto, o elemento $\{1,2,4\}$ não é minimal, pois ele contém propriamente o conjunto $\{1,2\}$ que também está em A. Por outro lado, $\{2\}$, $\{1,3\}$, e $\{3,4,5\}$ são minimais sob a relação '$\subseteq$'. Analogamente o elemento $\{2\}$ não é maximal pois $\{2\} \subseteq \{1,2,4\}$. Os elementos maximais de A sob $\subseteq$ são $\{1,3\}$, $\{1,2,4\}$ e $\{3,4,5\}$.

Relações de equivalência

Definição: Uma **relação de equivalência sobre** um conjunto A é uma relação $\mathcal{R}$ sobre A que é reflexiva sobre A, simétrica e transitiva.

Exemplo: Seja A o conjunto de todas as retas do plano, e seja $\mathcal{R}$ a relação $X\mathcal{R}Y$ se, e somente se, $X = Y$ ou $X \cap Y = \emptyset$. Esta relação é simplesmente a relação de paralelismo da geometria plana. Claramente a relação é reflexiva sobre A, simétrica e transitiva, logo é uma relação de equivalência.

Classes de equivalência

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Para todo elemento $a \in A$, o conjunto

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A : x\mathcal{R}a\}$$

é denominado a **classe de equivalência** do elemento a na relação $\mathcal{R}$.

Exemplo: Vamos construir as classes de equivalência da relação $\mathcal{R}$ de congruência módulo 5. A classe de equivalência de um inteiro i na relação $\mathcal{R}$, é o conjunto

$$[i]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{Z} : (\exists s \in \mathbb{Z})\, x - i = 5s\}$$

Ou seja, $x \in [i]_{\mathcal{R}}$ se e somente se $x = 5k + i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$; isto é, se e somente se x tem o mesmo resto que i quando dividido por 5. Portanto existem apenas 5 classes de equivalência, que correspondem aos possíveis restos da divisão por 5:

- $[0]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}$.
- $[1]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -9, -4, 1, 6, 11 \cdots\}$.
- $[2]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12 \cdots\}$.
- $[3]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -7, -2, 3, 8, 13, \cdots\}$.
- $[4]_{\mathcal{R}} = \{\cdots, -6, -1, 4, 9, 14, \cdots\}$.

Relações de equivalência e partições

Classes de uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ sobre um conjunto A são duas a duas disjuntas. Como todo elemento de A está em alguma classe, a união de todas as classes é o conjunto A. Isto significa que as classes de equivalência de $\mathcal{R}$ formam uma partição do conjunto A.