Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Contagem

- Um problema comum em matemática, e especialmente em computação, é contar objetos matemáticos (conjuntos, funções, sequências, etc.) com determinadas propriedades.
- Por exemplo, quantas maneiras diferentes há de escolher 5 cartas de um baralho com 52 cartas?

- Quantas palavras (com ou sem significado) podem ser formadas com 5 letras distintas? Quantas maneiras há de ordenar um arquivo de n nomes?
- Já encontramos alguns problemas desse tipo nos capítulos anteriores. Por exemplo, vimos que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é 2^n.

- é importante notar se os objetos que aparecem no enunciado são considerados distintos ou não.
- Por exemplo, observe a questão "quantos resultados é possivel obter quando dois dados são lançados sobre uma mesa?"

- Se os dados são considerados distintos (por exemplo, um vermelho e um verde), a resposta é $6 \times 6 = 36$. Note que o resultado "2 no vermelho e 4 no verde" é considerado diferente de "4 no vermelho e 2 no verde".
- Porém, se os dados são considerados indistinguíveis, a resposta é apenas 21; pois, por exemplo, o resultado "2 em um dado e 4 no outro" é o mesmo que "4 em um dado e 2 no outro".

Exercício: Liste e conte todas as maneiras possíveis de colocar 3 bolas, rotuladas de 1 a 3, em duas caixas rotuladas A e B. Note que cada caixa pode ficar vazia ou com mais de uma bola.

Agora responda à mesma pergunta, supondo que

a) As bolas são todas iguais e sem rótulos, mas as caixas ainda são distintas;
b) As bolas são todas distintas, mas as caixas são iguais e sem rótulos;
c) As bolas são todas iguais e as caixas também, todas sem rótulos.

Contagem de relações

- Suponha que X e Y são conjuntos finitos, com $|X| = m$ e $|Y| = n$. Quantas relações existem de X para Y? Lembramos que uma relação de X para Y é um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$, que tem mn elementos.
- Concluímos que a resposta é 2^{mn}. Pelo mesmo argumento, o número de relações sobre o conjunto X (isto é, de X para X) é 2^{m^2}.

- $|X| = m$.
- Quantas são as relações **reflexivas** sobre o conjunto X? Para responder a esta pergunta, basta lembrar que uma relação reflexiva sobre X deve conter a relação de identidade $\mathcal{I}_X$, que consiste dos pares (a, a) com $a \in X$. Então, cada relação que queremos contar consiste desses m pares, mais um subconjunto arbitrário dos demais $m^2 - m = m(m-1)$ pares de $X \times X$. Concluímos que o número de relações reflexivas sobre X é $2^{m(m-1)}$.

Contagem de funções

- Suponha ainda que X e Y são conjuntos finitos, com $|X| = m$ e $|Y| = n$. Quantas **funções** distintas existem de X para Y?
- Lembramos que, se $\mathcal{F}$ é uma dessas funções, então para cada elemento a de X deve existir um único par em $\mathcal{F}$ cujo primeiro membro é a.
- Portanto $\mathcal{F}$ tem apenas m pares. Em cada um desses pares, o segundo membro (o valor $\mathcal{F}(a)$ da função) pode ser qualquer um dos n elementos de Y.

- $|X| = m$, $|Y| = n$.
- Temos então n valores possíveis da função para cada um dos m elementos de X. Concluímos que o número de funções de X para Y é n^m.

Exercício: Quantas maneiras há de empilhar cinco frutas, que podem ser laranjas (indistinguíveis entre si) ou maçãs (também indistinguíveis) dentro um vaso estreito de vidro?

- Temos então n valores possíveis da função para cada um dos m elementos de X. Concluímos que o número de funções de X para Y é n^m.

Exercício: Quantas maneiras há de empilhar cinco frutas, que podem ser laranjas (indistinguíveis entre si) ou maçãs (também indistinguíveis) dentro um vaso estreito de vidro?

Princípio multiplicativo da contagem

- Quantas maneiras existem de enfileirar 7 crianças, sendo 4 meninas e 3 meninos, de modo a alternar meninos e meninas.
- Podemos pensar em formar a fila com 7 decisões sucessivas, onde na decisão número i escolhemos a criança que vai ficar na posição i da fila.
- Assim, começamos escolhendo uma meninas para ficar no começo da fila (pois se escolhermos um menino não será possível intercalar as demais).

- Em seguida temos que escolher um dos 3 meninos para ficar em segundo lugar.
- Depois temos que escolher outra menina, que não pode ser a que ficou em primeiro lugar; temos portanto apenas 3 alternativas possíveis nessa escolha.
- Analogamente, temos apenas 2 alternativas para o quarto lugar (um dos dois meninos ainda não escolhidos), 2 alternativas para o quinto (uma de duas meninas), e apenas 1 alternativa para o sexto e o sétimo lugares.

- Pode-se ver que qualquer disposição alternada das crianças pode ser obtida por esse processo; e que qualquer variação nas escolhas resultará em uma disposição diferente. Portanto, o numero de maneiras de arranjar as crianças é

$$4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 144 \qquad (1)$$

Princípio multiplicativo da contagem

O raciocínio usado neste problema é uma instância do **princípio multiplicativo da contagem**, ou **princípio fundamental da contagem**.

- Para usar esse princípio, temos que imaginar o processo de construção ou escolha de um dos objetos a contar como uma sequência finita de decisões $D_1, D_2, \ldots, D_r$, de tal forma que cada combinação diferente de escolhas nessas decisões produza um objeto diferente, e todos os objetos possam ser obtidos por esse processo.
- Nesse caso, se cada decisão D_i pode ter n_i escolhas distintas, então o número de objetos será

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r \tag{2}$$

Exercício: Quantos números inteiros existem entre 1000 e 9999 com todos os algarismos distintos?

Permutações

- Seja X um conjunto finito de n elementos. Informalmente, uma **permutação de** X é uma lista dos elementos de X em determinada ordem, sem repetições nem omissões.
- Mais precisamente, podemos definir uma permutação de X como uma função f bijetora do conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ para o conjunto X. Podemos interpretar o valor de $f(k)$ como o elemento que está na posição k da lista, contando a partir de 0.

Por exemplo, suponha que X é o conjunto das vogais, $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$. A função

$$\{(0, \mathtt{u}), (1, \mathtt{e}), (2, \mathtt{i}), (3, \mathtt{a}), (4, \mathtt{o})\}$$

é uma permutação de X. Esta função pode ser escrita também como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathtt{u} & \mathtt{e} & \mathtt{i} & \mathtt{a} & \mathtt{o} \end{pmatrix}$$

ou como a sequência $(\mathtt{u}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{a}, \mathtt{o})$ ou, simplesmente, `ueiao`; ficando subentendido que os índices da sequência começam com 0.

- Duas outras permutações, distintas dessa, são `uieao` $= (\mathtt{u}, \mathtt{i}, \mathtt{e}, \mathtt{a}, \mathtt{o})$ e `eaoiu` $= (\mathtt{e}, \mathtt{a}, \mathtt{o}, \mathtt{i}, \mathtt{u})$.
- Quantas permutações de $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$ existem? Quando tentamos escrever uma permutação f, elemento a elemento, é fácil ver que temos n escolhas para o elemento $f(0)$ (qualquer elemento de X); $n-1$ escolhas para $f(1)$ (qualquer elemento de X, exceto $f(0)$); $n-2$ para $f(2)$ (qualquer elemento exceto $f(0)$ e $f(1)$); e assim por diante.

- Para o penúltimo elemento $f(n-2)$ temos apenas 2 possibilidades e para o último $f(n-1)$ temos apenas uma. Qualquer série de escolhas resulta em uma permutação distinta. Portanto o número de permutações distintas é

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n! \qquad (3)$$

- Assim, por exemplo, o número de permutações das cinco vogais é $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

- Observe que se o conjunto X é vazio (isto é, se $n = 0$) há apenas uma permutação possível, que é a sequência vazia ().
- Esta observação justifica a definição de $0!$ como sendo 1.
- Suponha que n pessoas (com $n \geq 2$) devem sentar em uma fila de n cadeiras, mas duas dessas pessoas, Alice e Beto, são um casal e devem ficar um ao lado do outro. De quantas maneiras isto pode ser feito?
- $2(n-1)!$

- O fatorial de n cresce muito rapidamente quando n aumenta. Por exemplo,

$$20! = 2.432.902.008.176.640.000$$

ou seja, mais de dois quintilhões (bilhões de bilhões).
- O fatorial de 50 é aproximadamente 3.04×10^{64}, que é muito maior que o número de átomos no sistema solar.

- Assim, embora possamos facilmente calcular o **número** de permutações de um baralho de 52 cartas, é impossível **gerar** todas essas permutações em qualquer computador concebível atualmente.

Fórmula de Stirling

- A fórmula $n \times (n-1) \times \ldots \times 2! \times 1!$ não é adequada para calcular $n!$ quando n é muito grande.
- Por exemplo, para calcular 1000000! temos que multiplicar 1000000 de números, e o produto vai crescendo a cada passo; o resultado tem mais de 5 milhões de algarismos.

- Uma fórmula que permite estimar o valor aproximado do fatorial com menos trabalho foi encontrada por Abraham de Moivre (1667–1754) e James Stirling (1692–1770):

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)$$

onde ln é o logaritmo natural (na base $e = 2.7182818\ldots$). Aplicando $\exp(x) = e^x$ em ambos os lados temos

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Arranjos

- Dado um conjunto finito X de n elementos, e um inteiro $r \in \mathbb{N}$, definimos um **arranjo de** r **elementos de** X como uma sequência de elementos de X com comprimento r, em determinada ordem e sem repetições. Ou seja, uma função injetora dos inteiros $\{0..\, r-1\}$ para o conjunto X.

Por exemplo, os arranjos de 3 elementos do conjunto $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$. Onde `aie` significa a sequência $(\mathtt{a}, \mathtt{i}, \mathtt{e})$, ou seja a função

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \mathtt{a} & \mathtt{i} & \mathtt{e} \end{pmatrix}$$

e assim por diante.

aei	aie	eai	eia	iae	iea
aeo	aoe	eao	eoa	oae	oea
aio	aoi	iao	ioa	oai	oia
aeu	aue	eau	eua	uae	uea
aiu	aui	iau	iua	uai	uia
aou	auo	oau	oua	uao	uoa
eio	eoi	ieo	ioe	oei	oie
eiu	eui	ieu	iue	uei	uie
eou	euo	oeu	oue	ueo	uoe
iou	iuo	oiu	oui	uio	uoi

- Concluímos que o número de tais arranjos (ou seja, o número de funções injetoras de um conjunto de r elementos para um conjunto de n elementos) é

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \tag{4}$$

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$$

- Em muitos livros este número é denotado por A_n^r (lê-se "arranjos de n, tomados r a r"). Alguns autores usam a notação A_r^n. Outra notação, usada por Knuth, é $n^{\underline{r}}$ (lê-se "n à potência r caindo"). Este número pode ser calculado a partir de fatoriais, pela fórmula

$$\frac{n!}{(n-r)!} \tag{5}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

- Note que os fatores do denominador cancelam uma parte dos fatores do numerador, deixando apenas os fatores da fórmula (4). Assim, por exemplo, o número de arranjos de 3 vogais, listados acima, é $5!/(5-3)! = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

- Uma maneira de entender a fórmula $\frac{n!}{(n-r)!}$ é considerar todas as $n!$ permutações de n elementos, e imaginar o que ocorre se tomarmos apenas os r primeiros elementos de cada uma, para obter os arranjos. Note que duas permutações que diferem apenas na ordem dos $n - r$ elementos descartados produzem o mesmo arranjo. Há $(n - r)!$ maneiras de ordenar esses elementos descartados, sem mexer nos r primeiros. Portanto, das $n!$ permutações, $(n - r)!$ correspondem a um mesmo arranjo.

Combinações

- Outro problema muito comum é contar o **número de subconjuntos de tamanho** r de um conjunto X de n elementos.
- Diferente dos arranjos, neste caso a ordem dos elementos em cada subconjunto não interessa.

- Estes subconjuntos são também chamados de **combinações** de r elementos de X. Assim, por exemplo, as combinações de 3 vogais são

```
aei aeo aio aeu aiu
aou eio eiu eou iou
```

onde `aiu` significa o sub-conjunto $\{\mathtt{a}, \mathtt{i}, \mathtt{u}\}$, e assim por diante.

- O número de tais combinações acima é denotado por C_n^r (ou C_r^n) por alguns autores, porém a notação mais comum é $\binom{n}{r}$, que se lê "combinações de n, tomados r a r", ou "n escolhe r"
- Para contar as combinações, podemos determinar o número de arranjos de r elementos, e contar apenas uma vez todos os arranjos que diferem apenas na ordem dos elementos. Por exemplo, os seis arranjos `aio`, `aoi`, `iao`, `ioa`, `oai` e `oia` correspondem à mesma combinação $\{\mathtt{a}, \mathtt{i}, \mathtt{o}\}$.

- Como temos r elementos em cada arranjo, concluímos que cada combinação corresponde a $r!$ arranjos diferentes. Portanto, o número de combinações é

$$\frac{A_n^r}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times \cdots \times 1} \tag{6}$$

Esta fórmula pode ser escrita em termos de fatoriais

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{7}$$

Exercício: Quantas "mãos" diferentes de cinco cartas podem ser obtidas de um baralho de 52 cartas?

Casos especiais

- Alguns casos especiais são dignos de nota. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- Para todo inteiro n positivo,

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

- e, para todo inteiro n maior que 1,

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Além disso, é óbvio que $\binom{n}{r}$ é zero se r é maior que n.
- A definição de $\binom{n}{r}$ não faz muito sentido quando n e/ou r são negativos. Porém, a experiência mostra que muitos teoremas e fórmulas ficam mais simples quando definimos $\binom{n}{r} = 0$ quando $n < 0$ ou $r < 0$.

Propriedades

- A função $\binom{n}{r}$ tem várias propriedades interessantes. Por exemplo, para todo $n, r \in \mathbb{N}$, temos

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

- Considere um conjunto X de n elementos, e observe que para cada conjunto de r elementos existe um único conjunto de $n - r$ elementos que é seu complemento, e vice-versa.

Outra propriedade importante é a **identidade de Pascal**

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}$$

- **identidade de Pascal**:

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

- Para provar esta identidade, considere um conjunto X' de $n+1$ elementos e escolha um elemento arbitrário x de X'.
- Seja X o conjunto dos demais elementos, $X = X' \setminus \{x\}$.

- Considere agora todos os subconjuntos de X' com $r+1$ elementos. Eles podem ser separados em dois grupos:
  - aqueles que contém o elemento escolhido x, e
  - aqueles que não contém x.
- Os primeiros são exatamente os $\binom{n}{r}$ subconjuntos de X de tamanho r, cada um deles acrescido do elemento x.
- Os segundos são exatamente os $\binom{n}{r+1}$ subconjuntos de X de tamanho $r+1$.

Fórmula do Binômio de Newton

Uma das propriedades mais famosas das combinações é a fórmula de Newton para as potências de um binômio (soma de dois termos):

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Por exemplo, temos $(a+b)^4$

$$\begin{aligned} &= \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 \\ &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \end{aligned}$$

Por conta desta fórmula, os números $\binom{n}{r}$ são também chamados de **coeficientes binomiais**.

Fórmula recursiva

- A fórmula $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ não é muito eficiente quando n e r são números grandes, pois o numerador $n!$ e denominador $(n-r)!r!$ podem ser muito maiores que o resultado final $\binom{n}{r}$.
- Esta observação tabém vale se usarmos a fórmula, $C_n^r = A_n^r / r!$.

- Uma maneira mais eficiente é utilizar a recorrência

$$\binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} & \text{se } n \geq r > 0, \\ 1 & \text{se } n \geq r = 0, \\ 0 & \text{se } n < r \text{ ou } r < 0. \end{cases}$$

- Esta recorrência pode ser demonstrada por indução em r. Para provar o passo da indução, basta observar que o lado direito da equação 6 pode ser fatorada como segue

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\left(\frac{n-1}{r-1}\frac{n-2}{r-2}\cdots\frac{n-r+1}{1}\right)$$

e que a parte entre parênteses é $\binom{n-1}{r-1}$. Ou seja,

$$\binom{n}{r} = \prod_{k=1}^{r}\frac{n-r+k}{k}$$

- Podemos portanto calcular $\binom{n}{r}$ pelo seguinte algoritmo:
  1. Se $n < r$ ou $r < 0$, devolva 0. Senão
  2. $C \leftarrow 1$
  3. Para k variando de 1 a r, faça
  4. $\quad C \leftarrow (C \times (n-r+k))/k$
  5. Devolva C.
- Neste algoritmo é importante efetuar a multiplicação por $n-r+k$ antes de dividir por k. Isto garante que a divisão será exata.

Partições rotuladas e combinações com repetições

- Quantas maneiras há de distribuir 10 doces para 4 crianças, de modo que cada criança receba pelo menos um doce?

- Uma maneira de resolver este problema é imaginar que os 10 doces são colocados numa fileira, com barras separando os lotes dados a cada criança, numa ordem escolhida. Por exemplo, “ooo|oooo|o|oo” representaria a solução onde a primeira criança recebe 3 doces, a segunda recebe 4, a terceira 1, e a quarta 2.

- Observe que precisamos colocar 3 barras (para separar os lotes de 4 crianças), não podemos colocar duas barras na mesma posição, nem no início da fileira de doces, nem no fim dela (porque todas as crianças precisam receber pelo menos um doce).
- Há portanto 9 posições possíveis para as barras (para 10 doces), e cada solução válida é um subconjunto de 3 dessas posições. Portanto a resposta é $\binom{9}{3} = 84$.

- Mais geralmente, suponha que queremos repartir n elementos em p grupos distintos, sendo que cada grupo deve ter pelo menos um elemento. Ou seja, queremos saber quantas sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de inteiros positivos existem tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$.
- Pelo mesmo raciocínio acima, concluímos que a resposta é

$$\binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} = \binom{n-1}{n-p} \tag{8}$$

- Suponha agora o poblema de dividir 6 doces para 4 crianças, mas permitindo que uma ou mais crianças fiquem sem nenhum doce.
- Podemos fazer este problema (P_0) recair no anterior, com o seguinte truque: distribuímos 10 doces para as 4 crianças, garantindo pelo menos um doce para cada uma; e então recolhemos 1 doce de cada criança.

- Pode-se verificar que cada solução para este problema (P_1) dá uma solução diferente para o problema P_0, e vice-versa.
- Portanto, o número de soluções do problema P_0 é também $\binom{9}{3} = 84$.

- Mais geralmente, suponha que queremos repartir n elementos em p grupos distintos, mas permitindo que cada grupo fique vazio.
- Matematicamente, queremos saber quantas soluções existem para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$, sendo que cada incógnita x_i deve ser um número natural (incluindo 0).

- Podemos transformar este problema no anterior pela seguinte estratégia: contamos o número de soluções para $y_1 + y_2 + \cdots + y_p = n + p$ onde cada y_i é um inteiro positivo.
- Note que cada solução destas fornece uma solução distinta para o problema original, com $x_i = y_i - 1$; e vice-versa. Portanto, o número de soluções é

$$\binom{n+p-1}{p-1} = \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} = \binom{n+p-1}{n} \qquad (9)$$

- O problema de dividir 10 doces por 4 crianças pode também ser visto como escolher 10 elementos do conjunto $C = \{1, 2, 3, 4\}$, mas permitindo que cada elemento seja escolhido mais de uma vez; de modo que cada solução não é um conjunto, mas um **multiconjunto** — uma coleção de elementos onde a ordem não importa, mas importa quantas vezes cada elemento aparece.

- Por exemplo, uma solução seria $\{1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4\}$ (3 doces para a criança 1, 4 doces para a criança 2, etc.), que é diferente da solução $\{1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4\}$.

- Mais geralmente, queremos saber quantos multiconjuntos, cada um com n elementos no total, podem ser formados com os p elementos de um dado conjunto C.
- Estes multi-conjuntos são as **combinações com repetição desses** p **elementos tomados** n **a** n, e seu número é dado pela fórmula $\binom{n+p-1}{p-1} = \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} = \binom{n+p-1}{n}$.

- Note que esta contagem inclui também os multi-conjuntos que usam apenas alguns dos elementos de C. Se queremos considerar apenas as combinações com repetição que usam todo elemento de C pelo menos uma vez, devemos usar a fórmula $\binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} = \binom{n-1}{n-p}$.

Exercício: De quantos modos podemos comprar 3 sorvetes numa sorveteria que oferece 7 sabores distintos? (Note que podemos comprar mais de um sorvete do mesmo sabor.)

Permutações e arranjos circulares

- Considere uma roleta dividida em 5 setores idênticos. De quantas maneiras podemos rotular esses setores com as vogais $\mathtt{A}, \mathtt{E}, \mathtt{I}, \mathtt{O}, \mathtt{U}$, em ordem arbitrária?
- Se os setores fossem distinguíveis, a resposta seria o número de permutações de 5 elementos, isto é, $5!$.

- Para justificar este resultado, basta imaginar os setores numerados de 1 a 5 em ordem horária a partir de um setor determinado.
- Cada rotulação é então uma função bijetora dos números de 1 a 5 para as 5 vogais.

- Porém, como os setores são idênticos, duas permutações distintas podem resultar em rotulações idênticas. Por exemplo, obteremos o mesmo resultado se rotularmos os setores, em ordem horária, $(\mathtt{A}, \mathtt{E}, \mathtt{I}, \mathtt{O}, \mathtt{U})$, ou com $(\mathtt{U}, \mathtt{A}, \mathtt{E}, \mathtt{I}, \mathtt{O})$, ou com $(\mathtt{O}, \mathtt{U}, \mathtt{A}, \mathtt{E}, \mathtt{I})$, etc..
- Observe que cada rotulação distinta corresponde a 5 permutações distintas das cinco vogais. Portanto, o número de rotulações distintas deve ser $5!/5 = 4!$.

- Outra maneira de obter este resultado é imaginar que as vogais são aplicadas uma de cada vez, em ordem alfabética, em setores arbitrários. Como os setores são indistinguíveis, há apenas uma maneira de aplicar a letra $\mathtt{A}$ (e não cinco).

- Já a vogal $\mathtt{E}$ pode ser aplicada de 4 maneiras distintas, pois os outros 4 setores agora podem ser distinguidos pela sua posição em relação ao setor já rotulado.
- Da mesma forma temos 3 escolhas distintas para a letra $\mathtt{I}$, 2 para $\mathtt{O}$, e 1 para $\mathtt{U}$. Portanto o número configurações é $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$.

- Este exemplo ilustra o conceito de **permutação circular**: uma configuração de elementos distintos dispostos em círculo, sendo que configurações que diferem apenas por rotação são consideradas indistinguíveis. Generalizando o raciocínio acima, concluímos que o número de permutações circulares de n elementos é

$$\frac{n!}{n} = (n-1)! \tag{10}$$

Exercício: Quantas rodas distintas de 5 crianças podemos formar numa classe de 10 crianças? E de quantas maneiras podemos formar duas rodas de 5 com essas 10 crianças?

Contagem por divisão

- Mais geralmente, suponha que temos que contar um conjunto Y da forma

$$Y = \{\, f(x) : x \in X \,\} \tag{11}$$

onde X é algum outro conjunto finito, e f é uma função de X para Y. Se todo elemento de y é imagem de exatamente m elementos distintos de X, então $|Y| = |X| / m$.

- No exemplo das vogais, X é o conjunto de permutações das 5 vogais, Y são as rotulações distinguíveis dos setores da roleta, e $f(x)$ é a rotulação que se obtém quando os setores são rotulados segundo a permutação x.

Exercício: Em uma brincadeira com n crianças, $n-1$ crianças formam uma roda e uma delas fica no centro da roda. De quantas maneiras distintas é possível arranjar essas n crianças dessa forma?

Permutações e arranjos com elementos indistinguíveis

- Outro exemplo da técnica acima é contar os anagramas da palavra `BANANAS`; isto é, quantas sequências de 7 letras podem ser formadas rearranjando as letras da palavra `BANANAS`?

- Podemos obter cada uma dessas palavras tomando uma permutação dos números de 1 a 7, e aplicando à mesma uma função f que transforma o número 1 em `B`, os números 2 e 3 em `N`, os números 4, 5 e 6 em `A`, e o número 7 em `S`. Por exemplo,

$$\begin{aligned} f(1,2,3,4,5,6,7) &= \mathtt{BNNAAAS} \\ f(4,1,5,2,3,6,7) &= \mathtt{ABANNAS} \\ f(1,4,2,5,3,6,7) &= \mathtt{BANANAS} \\ f(1,6,3,5,2,4,7) &= \mathtt{BANANAS} \\ f(7,2,1,4,5,6,3) &= \mathtt{SABANAN} \end{aligned} \qquad (12)$$

e assim por diante.

- Quantas permutações geram a mesma palavra? Observe que a palavra não muda se trocarmos as posições dos valores 2 e 3 entre si; e/ou se trocarmos os valores 4, 5 e 6 entre si, nas $3! = 6$ maneiras possíveis. Quaisquer outras trocas de valores causam a troca de letras distintas.
- Portanto, cada palavra possível é obtida a partir de exatamente $2 \times 6 = 12$ permutações distintas. O número de palavras distintas é então $7!/12 = 420$.

- Mais geralmente, considere o problema de contar as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos, que podem ter p valores distintos $v_1, v_2, \ldots, v_p$; sendo que cada sequência deve ter exatamente m_i elementos iguais a v_i, para cada i.
- Pelo raciocínio acima, podemos concluir que o número de tais sequências é

$$\frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdots, m_p!} \tag{13}$$

Combinações múltiplas

- O número $\binom{n}{r}$ pode ser definido também como o número de maneiras de colocar n objetos distintos em duas caixas distintas, com r elementos na primeira caixa, e $n - r$ na segunda caixa. (Comparando com a definição usada na aula anterior, pode-se ver que o conteúdo da primeira caixa corresponde ao sub-conjunto escolhido do conjunto X, com r elementos, e a segunda caixa ao complemento desse sub-conjunto em relação a X.)

- Esta definição alternativa pode ser generalizada para qualquer número positivo t de caixas. Ou seja, podemos perguntar quantas maneiras existem de distribuir n objetos em t caixas **distintas**, com r_1 elementos na caixa 1, r_2 elementos na caixa 2, e assim por diante. Obviamente isso é possível apenas se $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = n$.

- Um raciocínio análogo ao utilizado na aula anterior permite concluir que esse número é

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_t} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_t!} \tag{14}$$

- Por exemplo, suponha que temos 10 pessoas para distribuir em três comissões A, B e C com, respectivamente, 5, 3, e 2 membros. Isso pode ser feito de

$$\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520 \qquad (15)$$

maneiras distintas.

Exercício: Quantas maneiras existem de distribuir 5 cartas para cada um de 4 jogadores, de um baralho de 52 cartas?(Note que, além das 4 mãos distribuídas, há também um monte de 32 cartas não distribuídas.)

Exercício: Quantas maneiras distintas existem de pintar 20 casas com as cores vermelha, azul, verde e amarela (cada casa de uma só cor), sendo que deve haver o mesmo número de casas de cada cor?

Princípio aditivo da contagem

- Consideremos agora o problema de contar quantos números pares de 4 dígitos distintos existem. Ou seja, quantas sequências de 4 algarismos podemos formar, sendo o dígito dos milhares (o mais a esquerda) não pode ser ‘0’, e o dígito das unidades (o mais à direita) só pode ser ‘0’, ‘2’, ‘4’, ‘6’ ou ‘8’.

- Esta contagem não pode ser feita apenas com o princípio multiplicativo, pois o número de escolhas possíveis para o dígito das unidades depende de quantos dígitos pares foram escolhidos nas outras posições, e vice-versa. Por exemplo, se o dígito das unidades for ‘0’ há 9 possibilidades para o dos milhares, enquanto que se for ‘2’ há apenas 8 escolhas.

- Neste caso podemos separar os números a contar em dois casos: o conjunto A dos que terminam em '0', e o conjunto B dos que terminam com '2', '4', '6' ou '8'.
- No primeiro caso, temos uma escolha ('0') para as unidades, e 9 escolhas para as dezenas. Para cada uma destas escolhas temos 8 escolhas para as centenas; para cada destas, temos 7 escolhas para os milhares. Portanto, $|A| = 1 \times 9 \times 8 \times 7 = 504$.

- No segundo caso, temos 4 escolhas para as unidades. Para cada uma destas, temos 8 escolhas para os milhares (não pode ser o das unidades, nem '0'). Mas, para cada uma destas escolhas, temos também 8 escolhas para as centenas (pois nesta posição podemos usar '0'); e para cada destas temos 7 nas dezenas. Portanto, $|B| = 4 \times 8 \times 8 \times 7 = 1792$. A contagem de todas as possibilidades é então $|A| + |B| = 2296$.

- Este exemplo é uma instância do **princípio aditivo da contagem**, ou **contagem por casos**: se os objetos a serem contados podem ser divididos em conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, **disjuntos dois a dois**, então o número total de objetos é $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$.

Princípio subtrativo da contagem

- Considere agora o problema de contar os números de 1000 a 9999 (inclusive ambos) nos quais o algarismo '3' aparece pelo menos uma vez. A solução N deste problema apenas pelo método aditivo e multiplicativo é relativamente trabalhosa. Uma solução mais simples é contar todos os números entre 1000 e 9999 (que são 9000), e subtrair desse total a contagem K dos números nesse intervalo onde o algarismo '3' **não** aparece.

- Nesta contagem, há 8 possibilidades para o algarismo dos milhares, e 9 para cada um dos outros três algarismos. Portanto, $K = 8 \times 9^3 = 5832$, e $N = 9000 - K = 3168$.

- Podemos chamar a técnica ilustrada por este exemplo de **princípio subtrativo da contagem**. Em geral, para contar um conjunto X, podemos contar um conjunto Y que contém X, e subtrair o número de elementos que foram contados a mais, ou seja a cardinalidade do complemento de X em Y:

$$|X| = |Y| - |Y \setminus X| \qquad \text{se } X \subseteq Y \tag{16}$$

- Esta fórmula também pode ser escrita

$$|Y \setminus Z| = |Y| - |Z| \qquad \text{se } Z \subseteq Y \tag{17}$$

- Esta técnica é interessante quando o conjunto maior Y e o complemento $Z = Y \setminus X$ são mais fáceis de contar do que o conjunto desejado X.

Exercício: Quantos números há entre 1000 e 9999, inclusive ambos, nos quais aparecem pelo menos dois algarismos consecutivos iguais?

Princípio da inclusão e exclusão

- Outra técnica importante de contagem baseia-se na seguinte identidade, que vale para quaisquer conjuntos finitos A e B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{18}$$

- Esta identidade é fácil de entender pelo diagrama de Venn: ao somar as contagens dos elementos de A e de B, estamos contando todos os elementos de $A \cup B$, mas contando em dobro os elementos de $A \cap B$.
- Pelo mesmo raciocínio podemos concluir que, para quaisquer conjuntos finitos A, B e C, vale a identidade

$$|A \cup B \cup C| =$$
$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- As fórmulas podem ser generalizadas para n conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{\substack{i \\ 1 leq i \leq n}} |A_i| \\ &- \sum_{\substack{i,j \\ 1 \leq i < j \leq n}} \left|A_i \cap A_j\right| \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k \\ 1 \leq i < j < k \leq n}} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| \\ &\ldots \\ &+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned} \tag{19}$$

- Para simplificar esta fórmula, vamos denotar por $\mathcal{C}_n^r$ o conjunto de todas as combinações de r elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Podemos escrever então

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \left(\sum_{X \in \mathcal{C}_n^r} \left| \bigcap_{k \in X} A_k \right| \right) \tag{20}$$

- Esta fórmula para a cardinalidade da união de conjuntos finitos é conhecida pelo nome de **princípio da inclusão e exclusão**. Observe que os princípios aditivo e subtrativo da contagem são casos particulares deste princípio.

Exercício: Quantos números entre 1 e 1.000.000 são divisíveis por 5, por 7, ou por 11?