

Lista 1 - MC458

Tema: Divisão e Conquista

Instruções: Utilize a técnica de divisão e conquista para resolver os seguintes exercícios.

1. Busca Binária

Considere o seguinte problema: Dado um vetor ordenado A , com n números reais, e um número real x , determine a posição $1 \leq i \leq n$ tal que $A[i] = x$. Caso x não exista no vetor, o algoritmo deve retornar -1 .

- Aplique a técnica de divisão e conquista e escreva um pseudocódigo que resolva esse problema.
- Prove a complexidade do algoritmo a partir da equação de recorrência.

2. Merge Sort

Considere o seguinte pseudocódigo do algoritmo Merge Sort:

Algoritmo 1: MergeSort

Entrada: Um arranjo com n

Saída: Um arranjo com os mesmos números ordenados

```
1 se  $n \geq 2$  então
2    $A$  = Recursivamente ordenar a primeira metade do arranjo de entrada;
3    $B$  = Recursivamente ordenar a segunda metade do arranjo de entrada;
4    $C$  = Intercalar (Merge) as duas partes ordenadas  $A$  e  $B$  em uma;
5 devolva  $C$ ;
```

Algoritmo 2: Merge

Entrada: A e B arranjos ordenados com $m/2$

Saída: Arranjo C de tamanho m com os mesmos elementos de A e B mas ordenados

```
1  $i = 1$ ;
2  $j = 1$ ;
3 para  $k$  de 1 até  $m$  faça
4   se  $A[i] < B[j]$  então
5      $C[k] = A[i]$ ;
6      $i++$ ;
7   senão
8      $C[k] = B[j]$ ;
9      $j++$ ;
10 devolva  $C$ ;
```

- Prove a corretude do algoritmo. (Para isso, é necessário provar tanto a função MERGE_SORT quanto a MERGE).

- b) Escreva a fórmula de recorrência do algoritmo e demonstre como chegar ao tempo de execução $O(n \log n)$ utilizando a árvore de recursão.

3. Soma do Subarranjo Máximo (Maximum Subarray Sum)

O Problema: Dado um arranjo de n números inteiros (positivos e negativos), encontre o subarranjo contíguo cuja soma dos elementos seja máxima.

- a) Escreva o pseudocódigo da solução com uma abordagem de divisão e conquista.
- b) Prove a corretude do algoritmo.
- c) Monte a equação de recorrência e resolva-a desenhando os níveis da árvore de recursão para justificar a complexidade.

4. Exponenciação Rápida

O Problema: Calcular x^n (onde x é um número real e n é um inteiro não negativo) de forma mais eficiente que a multiplicação iterativa tradicional. (*Dica: divida o problema verificando se n é par ou ímpar*).

- a) Escreva o pseudocódigo utilizando a abordagem de divisão e conquista.
- b) Resolva a recorrência $T(n) = T(n/2) + O(1)$ para provar que a complexidade é $O(\log n)$.

5. Encontrar um Pico (Peak Finding 1D)

O Problema: Dado um arranjo $A[1..n]$ de números inteiros onde elementos adjacentes são estritamente diferentes ($A[i] \neq A[i + 1]$), dizemos que um elemento $A[i]$ é um “pico” se ele for estritamente maior que seus vizinhos imediatos. Para as bordas, $A[1]$ é pico se $A[1] > A[2]$, e $A[n]$ é pico se $A[n] > A[n - 1]$. O vetor não está ordenado e pode haver múltiplos picos. O objetivo é encontrar **qualquer um** dos picos acessando o menor número possível de elementos.

- a) Projete um algoritmo de Divisão e Conquista que encontre um pico em tempo $O(\log n)$ e escreva seu pseudocódigo.
- b) Monte a equação de recorrência e resolva-a para provar a complexidade de tempo exigida.