

Lista 2 - MC458

Tema: Análise Assintótica

1. Sejam f e g funções reais não decrescentes definidas nos inteiros positivos, com $f(n)$ e $g(n)$ maiores ou iguais a 1 para todo n . Assuma que $f(n) = O(g(n))$, e seja c uma constante positiva. A afirmação $f(n) \cdot \log_2(f(n)^c) = O(g(n) \cdot \log_2(g(n)))$ é verdadeira?
 - a) Sim, para todas as funções f, g e constante c .
 - b) Nunca, não importa quais sejam f, g e c .
 - c) Às vezes sim, às vezes não, dependendo da constante c .
 - d) Às vezes sim, às vezes não, dependendo das funções f e g .
2. Assuma novamente duas funções positivas e não decrescentes f e g tais que $f(n) = O(g(n))$. É verdade que $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$? (Múltiplas alternativas podem estar corretas; escolha todas as aplicáveis).
 - a) Sim, para todas as funções f e g .
 - b) Nunca, não importa quais sejam f e g .
 - c) Às vezes sim, às vezes não, dependendo das funções f e g .
 - d) Sim, sempre que $f(n) \leq g(n)$ para todo n suficientemente grande.
3. Organize as seguintes funções em ordem crescente de taxa de crescimento, de modo que $g(n)$ venha logo após $f(n)$ na sua lista se, e somente se, $f(n) = O(g(n))$.
 - a) $\sqrt{n}$
 - b) 10^n
 - c) $n^{1.5}$
 - d) $2\sqrt{\log_2 n}$
 - e) $n^{5/3}$
4. Prove formalmente pela definição (encontrando as constantes positivas c_1, c_2 ou c , e $n_0 \geq 0$ adequadas):
 - a) Prove que $5n^2 - 3n + 20 = \Theta(n^2)$.
 - b) Prove por contradição que $n^3 \notin O(n^2)$.
 - c) Prove que $100n \log_2 n = O(n^2)$.
 - d) Prove que $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Omega(n^2)$.
 - e) Prove que para qualquer constante $k > 0$, $(n + k)^3 = \Theta(n^3)$.
5. Indique se as seguintes sentenças são verdadeiras ou falsas e justifique formalmente (com uma demonstração simples ou um contraexemplo):
 - a) $2^{n+1} = O(2^n)$.

- b) $2^{2n} = O(2^n)$.
- c) Se $f(n) = O(g(n))$, então $\log(f(n)) = O(\log(g(n)))$. (Assuma $\log(g(n)) \geq 1$).
- d) $(n+1)! = O(n!)$.
- e) $\log^3 n = O(\sqrt{n})$.
- f) Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$, então $f(n) = O(h(n))$.
- g) $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$.

6. Prove ou refute as seguintes afirmações sobre transitividade assintótica:

- a) Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
- b) Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.