Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
- Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

QuickSort - revisão

5	6	4	3	2	8	1	7

1	4	3	2	5	8	6	7

1	4	3	2		7	6	8

	2	3	4		6	7	

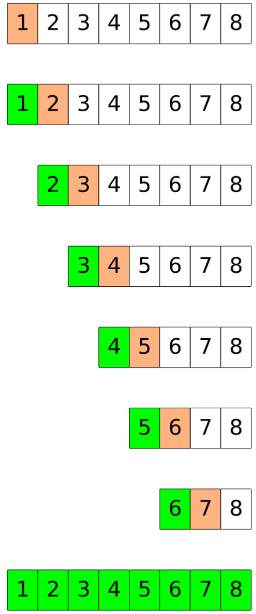
1	2	3	4	5	6	7	8

QuickSort

- Vamos analisar a complexidade do QuickSort.
- O que acontece com o QuickSort se a escolha de pivô for muito ruim?
- Como seria a árvore de recursão e complexidade no pior caso? Por exemplo se você tiver um arranjo já ordenado, e sempre escolhermos o primeiro elemento.

Suponha que implementamos o QuickSort, de forma que o pivô é sempre o primeiro elemento do arranjo. Qual é o tempo de execução desse algoritmo em um vetor de entrada que já está ordenado?

a. Não é possível estimar
b. $\Theta(n)$
c. $\Theta(n \log n)$
d. $\Theta(n^2)$



QuickSort

- Nesse caso iremos dividir em duas partes, uma vazia e uma com $n-1$ elementos. E o trabalho da partição será pelo menos:

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \Theta(n^2)$$

- O tempo de execução do QuickSort depende da qualidade do pivô escolhido.
- Um bom pivô é aquele que divide os problemas em partes de tamanho parecido,
- enquanto um pivô ruim é aquele que deixa duas partes muito desiguais.

QuickSort - o caso bom

- Se dividirmos o arranjo sempre no máximo, ou seja, na metade.
- Isso aconteceria se encontrássemos a mediana.
- Teremos duas partes com menos que metade dos elementos
- Podemos limitar superiormente pela mesma recorrência do MergeSort
- Sabemos então que no melhor caso QuickSort é $O(n \log n)$

Seja $T(n)$ o tempo de execução desse algoritmo em um vetor de tamanho n. Então

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

Pelo teorema mestre:

$$T(n) = O(n \log n)$$

Suponha que implementamos o QuickSort, de forma que (magicamente) sempre escolhemos a mediana como pivô. Qual é o tempo de execução desse algoritmo?

a. Não é possível estimar
b. $\Theta(n)$
c. $\Theta(n \log n)$
d. $\Theta(n^2)$

- Infelizmente não é possível encontrar a mediana em $O(1)$ para garantir esse tempo de execução.
- Felizmente não é necessário!

Aleatorização do QuickSort

- A aleatorização de algoritmos é uma ferramenta importante da bagagem de qualquer profissional da computação.
- Veremos como aplicar essa técnica no QuickSort e as vantagens que ela pode trazer.
- A ideia é escolher é escolher cada pivô aleatoriamente com a **mesma probabilidade**. E assim escolher um pivô "razoavelmente bom", em uma frequência "razoavelmente alta".
- Digamos que um pivô razoavelmente bom seria um que divida o arranjo em 25-75%, que é suficiente para garantir o tempo de execução de $O(n \log n)$
- Como seria a árvore de recursão nesse caso?
- Note que metade dos elementos, se escolhidos como pivô, resultam numa divisão de 25-75% ou melhor.

Revisão(zinha) de Probabilidade

Para completar a análise do QuickSort Aleatorizado e outros algoritmos, precisamos relembrar alguns conceitos de probabilidade:

- Espaço Amostral
- Eventos
- Variáveis Aleatórias
- Esperança

Espaço Amostral

- **Espaço Amostral** Ω = todos os possíveis resultados de um evento aleatório.
- cada resultado $i \in \Omega$ tem probabilidade $p(i) \geq 0$.
- **Restrição**: $\sum_{i \in \Omega} p(i) = 1$, ou seja, com certeza um dos resultados de Ω vai acontecer.

Exemplo 1

Rolar dois dados de 6 lados.
$\Omega = \{(1,1),(2,1),(3,1),\ldots,(5,6),(6,6)\}$ (pares ordenados)
$p(i) = \frac{1}{36}$ para todos $i \in \Omega$

Exemplo 2

Escolher o índice do pivô aleatório da primeira iteração do QuickSort.
$\Omega = \{1,2,\ldots,n\}$
$p(i) = \frac{1}{n}$ para todo $i \in \Omega$

Evento

- Um **evento** é um subconjunto $S \subseteq \Omega$.
- A probabilidade de um evento S é

$$\sum_{i \in S} p(i).$$

- Considere o evento "a soma dos dados é 7". Qual é a probabilidade desse evento?
  1. $1/36$
  2. $1/12$
  3. $1/6$
  4. $1/2$
- $S = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
- $Pr[S] = 6/36 = 1/6$

- Considere o evento "o pivô aleatório escolhido induz uma divisão de pelo menos $25 - 75\%$ ou melhor". Qual é a probabilidade desse evento?
  1. $1/n$
  2. $1/4$
  3. $1/2$
  4. $3/4$
- S = qualquer escolha que não seja os $1/4$ menores ou os $1/4$ maiores.

$$Pr[S] = \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Variáveis Aleatórias

- Uma **Variável Aleatória** X é uma função:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

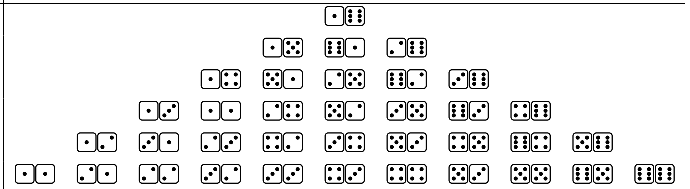
- Exemplo 1: A soma dos dois dados, ex: $X((2,5)) = 7$
- Exemplo 2: O valor do maior dado, ex: $Y((2,5)) = 5$
- Exemplo 3: Tamanho do subproblema passado na primeira chamada recursiva do QuickSort

Esperança

- Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma Variável Aleatória.
- A **Esperança** $E[X]$ de X é o valor médio de X ponderado pela probabilidade.

$$E[X] = \sum_{i \in \Omega} X(i) \cdot p(i)$$

- Qual a esperança da soma de dois dados?
  - a) 6.5
  - b) 7
  - c) 7.5
  - d) 8

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S'											
$\lvert S' \rvert$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \frac{3}{36} \cdot 4 + \frac{4}{36} \cdot 5 + \frac{5}{36} \cdot 6 + \frac{6}{36} \cdot 7 \\ &\quad + \frac{5}{36} \cdot 8 + \frac{4}{36} \cdot 9 + \frac{3}{36} \cdot 10 + \frac{2}{36} \cdot 11 + \frac{1}{36} \cdot 12 \\ &= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7 \end{aligned}$$

- Qual a esperança do tamanho do subproblema passado na primeira chamada recursiva do QuickSort?
  - a) $n/4$
  - b) $n/3$
  - c) $(n-1)/2$
  - d) $3n/4$
- Seja X o tamanho do subproblema.

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{n} \cdot (n-1) \\ &= \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n} \\ &= \frac{(n-1)(1+n-1)/2}{n} \\ &= \frac{n^2 - n/2}{n} = \frac{n^2-n}{2} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

Linearidade da Esperança

Lema

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias definidas em Ω. Então:

$$E\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[X_j\right]$$

- Vale mesmo quando as variáveis não são independentes!
- Exemplo: X_1 e X_2 são variáveis aleatórias que dizem o valor do primeiro e do segundo dado.

$$E[X_j] = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$$

- Qual o valor esperado para a soma de dois dados?

$$E[X] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 3.5 + 3.5 = 7.$$

Análise - QuickSort

Teorema

Para qualquer entrada de comprimento n, o tempo esperado de execução do QuickSort (com pivôs aleatórios) é $O(n \log n)$.

- Primeiramente considere como entrada um arranjo A de comprimento n.
- Espaço amostral: $\Omega =$ todos as possíveis sequências de escolhas de pivôs no QuickSort.
- Variável aleatória: para qualquer $\sigma \in \Omega$, $C(\sigma) =$ número de comparações entre dois elementos do arranjo feito pelo algoritmo QuickSort dado as escolhas σ. Note que o tempo de execução total do QuickSort é dominado por esse número.
- O objetivo então é mostrar que $E[C] = O(n \log n)$

- Notação:
  - $z_i = i$-ésimo menor elemento
  - ou seja, z_i não é o elemento que está originalmente na i-ésima posição do vetor, mas sim o elemento que vai ocupar a i-ésima posição no vetor quando ordenado.

$$(\underbrace{6}_{z_2}, \underbrace{10}_{z_4}, \underbrace{8}_{z_3}, \underbrace{2}_{z_1})$$

  - para uma escolha σ, e $i < j$, seja $X_{ij}(\sigma) =$ número de vezes que z_i e z_j são comparados.
- Fixado dois elementos da entrada, quantas vezes eles podem ser comparados?
  1. 1
  2. 0 ou 1
  3. 0, 1 ou 2
  4. algo entre 0 e $n-1$

Algoritmo 1: QuickSort

Entrada: Um arranjo A, índices l e r
Saída: Um arranjo com os mesmos elementos de A porém ordenados

```
se r − l ≤ 0 então devolva A;
p = Partição(A, l, r);
QuickSort(A, l, p-1);
QuickSort(A, p+1, r);
devolva A;
```

Algoritmo 2: Partição

Entrada: Um arranjo A, índices l e r
Saída: O mesmo arranjo mas particionado

```
Coloca o pivot em A[l] ;
pivot = A[l] ;
i = l + 1;
para j = l + 1 até r faça
    se A[j] < pivot então
        Troca A[j] e A[i];
        i = i + 1;
Troca A[l] e A[i − 1];
devolva i − 1;
```


- Podemos então facilmente escrever C em função de X

$$C(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}(\sigma), \qquad \forall \sigma \in \Omega$$

- Pela linearidade da esperança (lembrando que ela se aplica mesmo se as variáveis não forem independentes)

$$E[C] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}].$$

- Como:

$$\begin{aligned} E[X_{ij}] &= 0 \cdot Pr[X_{ij} = 0] + 1 \cdot Pr[X_{ij} = 1] \\ &= \cancel{0 \cdot Pr[X_{ij} = 0]} + 1 \cdot Pr[X_{ij} = 1] \\ &= Pr[X_{ij} = 1] = Pr[z_i \text{ e } z_j \text{ serem comparados}] \end{aligned}$$

$$E[C] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Pr[z_i \text{ e } z_j \text{ serem comparados}]$$

Lema

Para todo $i < j$, $Pr[z_i \text{ e } z_j \text{ serem comparados}] = \frac{2}{(j-i+1)}$

- Fixe z_i, z_j com $i < j$.
- Considere o conjunto $\{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{j-1}, z_j\}$.
- Desde que nenhum desses números seja escolhido como pivô, todos serão passados juntos para a mesma chamada recursiva.
- Considere então o primeiro entres $\{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{j-1}, z_j\}$ que é escolhido como pivô:
  - se z_i ou z_j for escolhido primeiro, eles serão escolhidos.
  - se escolher um dos outros então z_i e z_j nunca serão comparados.
- como a escolha é aleatória qualquer um dos elementos do conjunto tem a mesma chance de ser escolhido primeiro (do conjunto) e portando a chance deles serem comparados é

$$2/(j-i+1)$$

Então

$$E[C] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Pr[z_i \text{ e } z_j \text{ serem comparados}] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{(j-i+1)}$$

$$E[C] = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{(j-i+1)}$$

.

- Agora note que a soma interna

$$\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{(j-i+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-i+1}$$

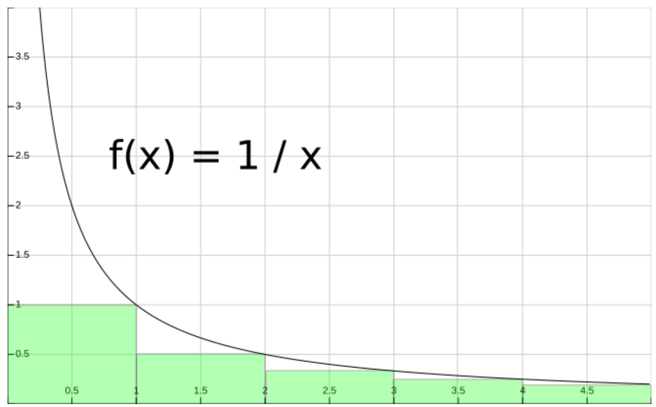
- e ela obtêm a maior quantidade de termos (e o maior valor) quando $i = 1$
- A maior soma então é

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Limitamos então superiormente a esperança por:

$$\begin{aligned} E[C] &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{(j-i+1)} \\ &\leq 2 \cdot n \cdot \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{(j-i+1)} \\ &\leq 2 \cdot n \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$E[C] \leq 2 \cdot n \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$



$$E[C] \leq 2 \cdot n \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

A soma agora pode ser limitada superiormente por:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_{1}^{n} = \ln n - \cancel{\ln 1} = \ln n$$

.
Portanto:

$$E[C] \leq 2 \cdot n \cdot \ln n$$

e portanto:
O tempo de execução esperado do QuickSort é $O(n \log n)$ □

Um limitante inferior para Algoritmos de Ordenação

- Algoritmos de Ordenação como o InsertionSort, BubbleSort, SelectionSort, MergeSort, QuickSort e HeapSort baseiam seu funcionamento em comparação entre seus elementos.
- É o método usado quando não podemos assumir nenhuma propriedade sobre os elementos da entrada.
- Ou quando não podemos acessar diretamente os elementos mas apenas compará-los através de uma função.
- São algoritmos de propósitos gerais pois funcionam para qualquer tipo de entrada.
- Existem algoritmos de ordenação que se baseiam em outro tipo de interação com os dados. BucketSort, CountingSort, RadixSort.
- Mas esses algoritmos partem de alguma premissa sobre os dados. Ex: São inteiros com N dígitos, são valores de ponto flutuante uniformemente distribuídos entre 0 e 1;

Teorema

Todo algoritmo de ordenação baseado em comparações tem um tempo de execução de pior caso $\Omega(n \log n)$.

- Suponha uma entrada qualquer de comprimento n e um algoritmo baseado em comparações que ordena corretamente esse arranjo.
- Seja K o número de comparações feitas pelo algoritmo
- Para cada comparação o algoritmo tem um resultado digamos 0 ou 1
- Portanto o número total de resultados possíveis é 2^K
- O número possível de permutações do arranjo de entrada é $n!$

Se $2^K < n!$ pelo principio da casa dos pombos duas entradas idênticas irão obter os mesmos resultados, o que é um absurdo já que o algoritmo ordena corretamente.
Portanto:

$$\begin{aligned} 2^K &\geq n! \\ &= n(n-1)(n-2)\ldots(n/2)\ldots 1 \\ &\geq \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n/2)}_{n/2 \text{ termos}} \\ &\geq \underbrace{(n/2)(n/2)(n/2)\ldots(n/2)}_{n/2 \text{ termos}} \\ &= (n/2)^{(n/2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2^K &\geq (n/2)^{(n/2)} \\
\log 2^K &\geq \log(n/2)^{(n/2)} \\
K \log 2 &\geq (n/2)\log(n/2) \\
K &\geq (n/2)\log(n/2)
\end{aligned}
$$

Portanto K é $\Omega(n \log n)$. $\square$

- Dessa forma nenhum algoritmo baseado em comparações pode ser melhor que $O(n \log n)$.