# Algoritmos e Programação II

Pedro Hokama



Apresentação Baseada:

- Stanford Algorithms
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.



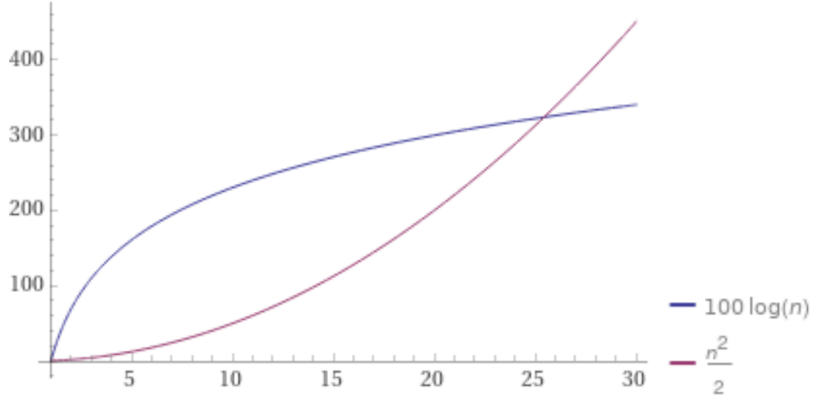
## Princípios da Análise de Algoritmos

- Iremos fazer uma Análise **Assintótica** dos algoritmos, o que significa que estamos interessados no comportamento deles para instâncias **grandes**.
- Isso nos permite dizer que um algoritmo é mais rápido que outro assumindo que o tamanho $n$ da instância é suficientemente grande.
- Por exemplo, podemos dizer com segurança que um algoritmo que executa em $20 \log n$ é mais rápido que um que executa em $\frac{1}{2}n^2$
- Note que isso pode não ser verdade para $n$ pequeno, mas a partir de algum $n = n_0$ sempre será verdade.
- De fato, para $n$ pequeno, tanto faz o algoritmo que você use. Estamos interessados em resolver problemas grandes!

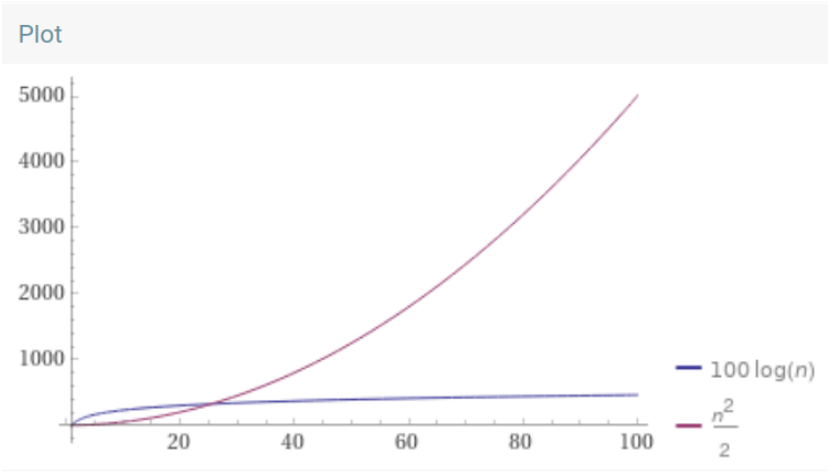


## Princípios da Análise de Algoritmos

Plot

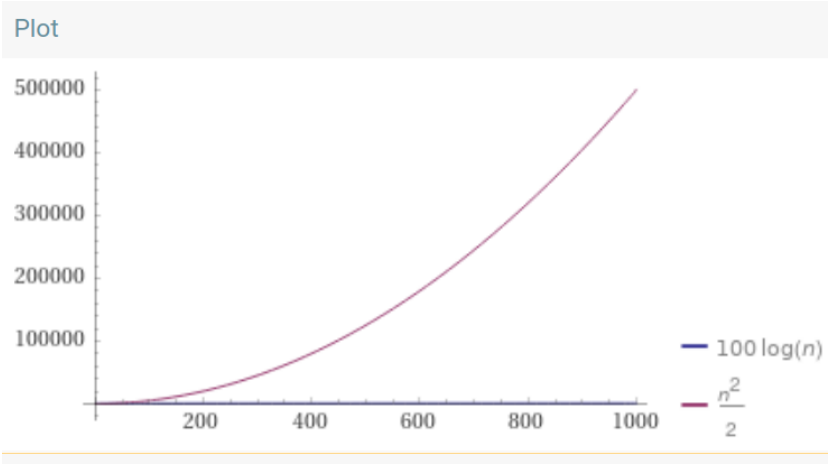


## Princípios da Análise de Algoritmos






## Princípios da Análise de Algoritmos






## Princípios da Análise de Algoritmos

- Você poderia imaginar que com o avanço dos hardwares, bastaria eu usar um computador melhor.
- Na verdade quanto maior o poder computacional, MAIOR é a disparidade entre algoritmos eficientes.
- Podemos pensar no tamanho do problema que podemos resolver com computadores mais potentes usando diferentes algoritmos.
- Suponha que você tem dois algoritmos para um problema.

| Algoritmo $A$ | Algoritmo $B$ |
|---|---|
| $n$ | $n^2$ |

- Suponha que você fez um grande investimento e comprou um computador 4 vezes mais potente. Com o algoritmo $A$ você pode resolver um problema 4 vezes maior, enquanto com o algoritmo $B$ você só pode resolver um problema 2 vezes maior.



## Princípios da Análise de Algoritmos

- Aplicaremos a Análise de Pior Caso
- Esse limite também é aplicado se um adversário tentasse atribuir números de forma a deixar o algoritmo lento.
- Essa análise é particularmente interessante por não precisar entender a aplicação do problema, padrões de entrada e ela é usualmente mais útil e mais fácil que as alternativas:
  - Análise de Caso Médio (Exige assumir alguma distribuição da entrada, ter conhecimento do domínio, mais difícil de ser feita)
  - Desempenho em *Benchmarks*
- A análise assintótica é uma ferramenta adequada pois:
  - É simples o bastante para suprimir detalhes de arquitetura/linguagem/compilador.
  - Mas é complexa o bastante para permitir a comparação entre diferentes algoritmos, especialmente em instâncias grandes.

## Análise Assintótica

**Ideia geral**

Suprimir fatores constantes e termos de ordens inferiores.

- Por exemplo em:

$$3n^2 + 10n + 50$$

10n + 50 são termos de ordem inferior, 3 é constante então resultaria em:

$$n^2$$

- Então quando dizemos que o tempo de execução de um algoritmo é $O(n^2)$, ou de maneira geral quando dizemos que um algoritmo é $O(f(n))$. Estamos dizendo que depois de eliminar os termos de ordem inferior e constantes acabamos apenas com $f(n)$.



## Análise assintótica de funções quadráticas - termos de menor ordem

Considere a função quadrática $3n^2 + 10n + 50$:

| $n$ | $3n^2 + 10n + 50$ | $3n^2$ |
|---|---|---|
| 64 | 12978 | 12288 |
| 128 | 50482 | 49152 |
| 512 | 791602 | 786432 |
| 1024 | 3156018 | 3145728 |
| 2048 | 12603442 | 12582912 |
| 4096 | 50372658 | 50331648 |
| 8192 | 201408562 | 201326592 |
| 16384 | 805470258 | 805306368 |
| 32768 | 3221553202 | 3221225472 |

- Como se vê, $3n^2$ é o termo dominante quando $n$ é grande.
- De um modo geral, podemos nos concentrar nos termos dominantes e esquecer os demais.



## Exemplos

Exemplo de um laço

**Algoritmo 1**: Procura

**Entrada**: Um vetor $A$ de tamanho $n$ e um inteiro $t$
**Saída**: Verdadeiro se $A$ contêm $t$, Falso caso contrário

```
1 para k de 1 até n faça
2     se A[k] == t então
3         devolva Verdadeiro;
4 devolva Falso;
```

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

a. $O(1)$
b. $O(\log n)$
c. $O(n)$
d. $O(n^2)$

- O tempo de execução do exemplo depende por exemplo se $t$ está ou não em $A$, e se $t$ estiver na primeira posição? Estamos interessados no pior caso!
- Quantas operações estamos fazendo nas linhas 1 e 2? Uma, duas, três? Isso é constante e é suprimido pela notação $O$.



## Exemplos

Exemplo de dois laços consecutivos

**Algoritmo 2**: Procura2

**Entrada**: Dois vetores $A$ e $B$ de tamanho $n$ e um inteiro $t$
**Saída**: Verdadeiro se $A$ ou $B$ contêm $t$, Falso caso contrário

```
1 para k de 1 até n faça
2     se A[k] == t então devolva Verdadeiro;
3 para k de 1 até n faça
4     se B[k] == t então devolva Verdadeiro;
5 devolva Falso;
```

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

a. $O(1)$
b. $O(\log n)$
c. $O(n)$
d. $O(n^2)$

- Evidentemente, nesse problema a entrada é na verdade de tamanho $2n$, então o algoritmo não seria $O(2n)$? Essa constante é suprimida na notação $O$.

## Exemplos

Exemplo de dois laços aninhados

**Algoritmo 3**: ProcuraComum

**Entrada**: Dois vetores $A$ e $B$ de tamanho $n$
**Saída**: Verdadeiro se $A$ ou $B$ têm um numero em comum, Falso caso contrário

```
1 para j de 1 até n faça
2     para k de 1 até n faça
3         se A[j] == B[k] então devolva Verdadeiro;
4 devolva Falso;
```

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

a. $O(1)$
b. $O(\log n)$
c. $O(n)$
d. $O(n^2)$

- Pior caso ✓. Constantes ✓.
- Nesse caso se o tamanho dos vetores dobrar, o tempo de execução quadruplica!



## Exemplos

Exemplo de dois laços aninhados

**Algoritmo 4**: ProcuraComum

**Entrada**: Um vetor $A$ de tamanho $n$
**Saída**: Verdadeiro se $A$ tem números duplicados, Falso caso contrário

```
1 para j de 1 até n faça
2     para k de j + 1 até n faça
3         se A[j] == A[k] então devolva Verdadeiro;
4 devolva Falso;
```

- Dessa vez, obviamente, procuramos no vetor $A$ ao invés de $B$.
- Ao invés de olhar todas combinações de $j$ e $k$, olhamos apenas aquelas em que $k \geq j + 1$.
- Isso é válido pois comparar, por exemplo, o primeiro com o terceiro elemento é a mesma coisa que comparar o terceiro com o primeiro. Então diminuímos nossas comparações pela metade!

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

a. $O(1)$
b. $O(\log n)$
c. $O(n)$
d. $O(n^2)$

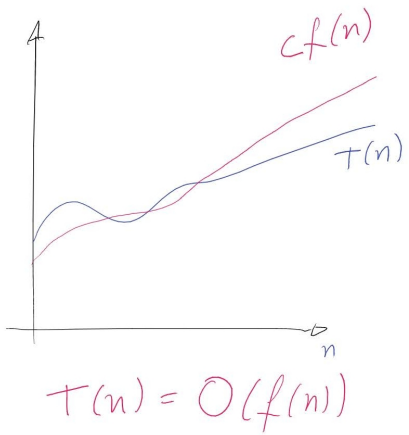
Exercício: É possível fazer esse algoritmo mais eficiente? Como?



## Notação O

- Big Oh, Ózão, O grande.
- Notação O é utilizada em funções definidas nos inteiros positivos.
- Seja $T(n)$ uma função sobre $n = 1, 2, 3, \ldots$
- $T(n) : \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{R}$
- Pergunta: Quando podemos dizer que $T(n) = O(f(n))$?
- Resposta: Se eventualmente, para um n suficientemente grande, $T(n)$ é limitado superiormente por uma alguma constante vezes $f(n)$.






- $T(n) = O(f(n))$ se quanto multiplicado por alguma constante $c$ tal que $c \cdot f(n)$ está sempre acima de $T(n)$

## Exercício

- Implemente uma Busca Linear, faça a análise de complexidade
- Implemente uma Busca Binária, faça a análise de complexidade