Teoria dos Jogos

Hokama PhD

24 de março de 2023

Referências

- Game Theory, Stanford University on Coursera. Matthew O. Jackson, Yoav Shoham e Kevin Leyton-Brown. `https://www.coursera.org/learn/game-theory-1`
- Algorithmic Game Theory, Stanford Fall 2013, Tim Roughgarden. `https://timroughgarden.org/f13/f13.html`
- Twenty lectures on algorithmic game theory. Tim Roughgarden. Cambridge University Press, 2016.
- Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação. In: Anais do 30 o Colóquio Brasileiro de Matemática. Schouery, R. C. S., Lee, O., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. Rio de Janeiro. Editora do IMPA, 2015.

Dominação

- Sejam s_i e s_i' duas estratégias para o jogador i, e seja S_{-i} o conjunto de todos os possíveis perfis de estratégia para todos os outros jogadores. (Por agora, estratégia é escolher uma ação)

Definição: Dominação estrita

s_i **domina estritamente** s_i' se $\forall s_{-i} \in S_{-i}, u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$.

Definição: Dominação muito fraca

s_i **domina muito fracamente** s_i' se $\forall s_{-i} \in S_{-i}, u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$.

- Se uma estratégia s_i domina uma outra s_i' eu não preciso nem considerar s_i' independentemente do que meu adversário vai jogar.
- Se uma estratégia domina todas as outras, dizemos que ela é **dominante** (podemos dizer se ela é estritamente dominante ou muito fracamente dominante).
- Um perfil de estratégia em que todos os jogadores jogam sua estratégia dominante tem que ser um equilíbrio de Nash.
- Se todas as estratégias forem estritamente dominantes, então esse equilíbrio deve ser único.

j1 \ j2	Calar	Delatar
Calar	-1, -1	-4, 0
Delatar	0, -4	-3, -3

Os prisioneiros tem uma estratégia estritamente dominante?
Informalmente: Uma estratégia dominante s_i existe se para qualquer coluna que o jogador 2 jogar, o Jogador 1 melhor responde com a mesma estratégia s_i. Pode não existir nenhuma.

Considere o seguinte jogo:

j1 \ j2	x	y	z
a	1, 2	2, 2	5, 1
b	4, 1	3, 5	3, 3
c	5, 2	4, 4	7, 0
d	2, 3	0, 4	3, 0

Quais estratégias são estritamente dominantes?
Resp: c, (y é muito fracamente dominante)

Analisando Jogos

- Nós definimos alguns jogos clássicos, e pensamos sobre como jogá-los. Agora vamos examinar os jogos externamente.
- Do ponto de vista de um observador externo, podem alguns resultados de um jogo serem ditos **melhores** do que outros?
  - Nenhum agente é mais importante que outro.
  - Poderíamos tentar algo como "lucro-máximo" (maior beneficio social), porém as recompensas de cada jogador podem ser expressas em unidade diferentes. (real, dolar, felicidade)
- Existe alguma forma de preferir um resultado a outro?

Otimalidade de Pareto

- **Ideia**: algumas vezes, um resultado o é pelo menos tão bom quanto o' para todos os agentes, e tem pelo menos um agente que prefere o à o'.
  - Nesse caso, é razoável dizer que o é melhor do que o'.
  - Dizemos que o **Pareto-domina** o'.

Definição: Dominância de Pareto

Um resultado o **Pareto-domina** o' se $\forall i, u_i(o) \geq u_i(o')$ e pelo menos um jogador $j, u_j(o) > u_j(o')$.

Definição: Otimalidade de Pareto

Um resultado $o*$ é **Pareto-ótimo** se não existe nenhum resultado que Pareto-domina ele.

	Esq	Dir
Esq	1, 1	0, 0
Dir	0, 0	1, 1

	CR	TR
CR	2, 1	0, 0
TR	0, 0	1, 2

	Cara	Coroa
Cara	1, -1	-1, 1
Coroa	-1, 1	1, -1

j1 \ j2	Calar	Delatar
Calar	-1, -1	-4, 0
Delatar	0, -4	-3, -3

- Pode um jogo ter mais de um resultado Pareto-ótimo?
  - Resposta: Sim, pense em um jogo com todos os resultados iguais, por exemplo. (Mas acontece em jogos comuns)
- Todo jogo tem pelo menos um resultado Pareto-ótimo?
  - Resposta: Sim, para não ter um resultado Pareto-ótimo todo resultado deveria ser dominado por outro, eventualmente formando um ciclo. Pela definição de dominância de Pareto, isso significaria melhorar o resultado infinitamente.
- Informalmente, um resultado é pareto ótimo se estando nele não existe um outro resultado (com utilidade diferente) que todos simultaneamente concordariam em mudar.

	Esq	Dir
Esq	**1, 1**	0, 0
Dir	0, 0	**1, 1**

	CR	TR
CR	**2, 1**	0, 0
TR	0, 0	**1, 2**

	Cara	Coroa
Cara	**1, -1**	**-1, 1**
Coroa	**-1, 1**	**1, -1**

j1 \ j2	Calar	Delatar
Calar	**-1, -1**	**-4, 0**
Delatar	**0, -4**	-3, -3

Exercício

No jogo abaixo, quais resultados são pareto-ótimos (Pode ser um, mais de um, ou nenhum)

	Esq	Dir
Esq	3, 3	1, 1
Dir	1, 4	1, 1

Resp: $\langle Esq, Esq \rangle$ e $\langle Dir, Esq \rangle$

- Se o atacante escolher a mesma rota do defensor, ele tem uma recompensa muito negativa, pois será capturado.
- Caso ele escolha uma estrada não defendida ele tem uma recompensa que varia de acordo com o alvo atacado.
- Se o defensor usar uma estratégia determinística, o atacante poderia observar por um tempo, para entender o comportamento e saberia quando uma estrada estaria livre.

Estratégias Mistas

Considere o seguinte caso:

- Em 2006 a ONU estava em missão na Somália, montando pontos de controle para defender pontos de interesse contra ataques terroristas.
- Eles montam o ponto de controle em uma estrada, e revistam todos os carros que passam por lá, para verificar se não há explosivos ou outros materiais perigosos.
- A ONU pode montar seus pontos de controle em diferentes estradas a cada hora.
- Um terrorista de decidisse atacar, deveria escolher uma dessas estradas para se dirigir ao alvo.

- Dessa forma não é assim que os pontos de controle são escolhidos, e existe um fator aleatório na escolha deles;
- mesmo se o atacante observar por um tempo, e descubra qual é essa estratégia aleatorizada, ele não saberá em quais estradas estão os pontos de controle nas próximas horas.
- Esse tipo de estratégia é chamada de **Estratégia Mista**

	Cara	Coroa
Cara	1, -1	-1, 1
Coroa	-1, 1	1, -1

Seria uma ideia ruim jogar o combinando moedas de maneira determinística.

- Ideia: Confundir o adversário jogando **aleatóriamente.**
- Definiremos uma **estratégia mista** s_i para o agente i como qualquer distribuição de probabilidade sobre as ações A_i.
  - Se somente uma ação tem probabilidade positiva, temos uma **estratégia pura**
  - Se mais de uma ação tem probabilidade positiva, temos uma **estratégia mista**
  - Essas ações são chamadas de **suporte** de uma estratégia mista

- De forma que $s_i(a_i)$ é a probabilidade do jogador i jogar a ação a_i.
- Seja S_i o conjunto de **todas as estratégias** para i.
- Seja $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ o conjunto de **todos os perfis de estratégias**.
- Agora a nossa noção de estratégia não é apenas escolher do conjunto finito das ações possíveis, mas é um conjunto infinito de distribuições de probabilidades aplicadas no conjunto das ações.

- O problema é que apenas conhecemos as funções de utilidades para perfis de ações.
- Mas agora dado um perfil de estratégias (uma distribuição e probabilidade para cada jogador) eu não consigo só olhar na matriz e ler uma utilidade.

- Usaremos a ideia de **utilidade esperada** emprestada da teoria de decisão:

Definição: Utilidade esperada

Dado um perfil de estratégias mistas s a **utilidade esperada** de um jogador i é

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) Pr(a|s) \tag{1}$$

$$Pr(a|s) = \prod_{j \in N} s_j(a_j), \text{ sendo } a = \langle a_1, \ldots, a_N \rangle; \tag{2}$$

Considere o jogo entre um batedor de pênalti e um goleiro. Com qual probabilidade acontecem cada um dos perfis de ações.

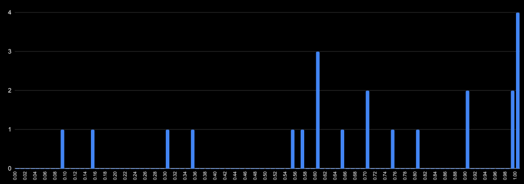
	b \ g	0.5 Esq	0.5 Dir
0.7	Esq	0, 1	1, 0
0.3	Dir	1, 0	0, 1

Jogo

Considere que você é o goleiro do time, e você vai defender 10000 pênaltis contra um batedor que tem a seguinte estratégia:

- com 0.7 de probabilidade ele chuta para a esquerda
- e com probabilidade 0.3 ele chuta para a direita.

Você precisa definir uma estratégia também. Com qual probabilidade p você vai para a esquerda? (com probabilidade (1 - p) você vai para a direita. JUSTIFIQUE



```
Diego    defendeu 7022 e deixou passar 2978 com a estrategia (1.00, 0.00)
João     defendeu 7007 e deixou passar 2993 com a estrategia (1.00, 0.00)
Filipe   defendeu 6994 e deixou passar 3006 com a estrategia (0.99, 0.01)
Gabriel  defendeu 6972 e deixou passar 3028 com a estrategia (1.00, 0.00)
Hokama   defendeu 6948 e deixou passar 3052 com a estrategia (1.00, 0.00)
Thalles  defendeu 6834 e deixou passar 3166 com a estrategia (0.99, 0.01)
Rodrigo  defendeu 6651 e deixou passar 3349 com a estrategia (0.90, 0.10)
Jubeto   defendeu 6557 e deixou passar 3443 com a estrategia (0.90, 0.10)
Ana C.   defendeu 6191 e deixou passar 3809 com a estrategia (0.80, 0.20)
Marcelo  defendeu 6053 e deixou passar 3947 com a estrategia (0.75, 0.25)
Ivan     defendeu 5816 e deixou passar 4184 com a estrategia (0.70, 0.30)
Amanda   defendeu 5727 e deixou passar 4273 com a estrategia (0.70, 0.30)
Thomas   defendeu 5620 e deixou passar 4380 com a estrategia (0.65, 0.35)
Leo.  R  defendeu 5554 e deixou passar 4446 com a estrategia (0.60, 0.40)
Thiago   defendeu 5454 e deixou passar 4546 com a estrategia (0.60, 0.40)
Davi     defendeu 5394 e deixou passar 4606 com a estrategia (0.60, 0.40)
Julia    defendeu 5389 e deixou passar 4611 com a estrategia (0.58, 0.42)
João     defendeu 5257 e deixou passar 4743 com a estrategia (0.55, 0.45)
José     defendeu 4473 e deixou passar 5527 com a estrategia (0.35, 0.65)
Kaique   defendeu 4237 e deixou passar 5763 com a estrategia (0.30, 0.70)
Nicole   defendeu 3602 e deixou passar 6398 com a estrategia (0.15, 0.85)
Leo V.   defendeu 3307 e deixou passar 6693 com a estrategia (0.09, 0.91)
```

Voltamos ao jogo de Combinar moedas, como vimos esse jogo não tem um Equilíbrio de Nash de estratégia pura. Porém pode ter utilizando estratégias mistas (e segundo o Teorema de Nash, têm que ter)

	Cara	Coroa
Cara	1, -1	-1, 1
Coroa	-1, 1	1, -1

Melhor Resposta e Equilibrio de Nash de estratégias mistas

Definição: Melhor Resposta

$s_i^* \in MR(s_{-i})$ se e somente se $\forall s_i \in S_i, u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$.

Definição: Equilibrio de Nash

$s = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ é um **equilibrio de Nash** se e somente se $\forall i, s_i \in MR(s_{-i})$.

Teorema (Nash, 1950)

Todo jogo finito tem um equilibrio de Nash.

		0.3 Cara	0.7 Coroa
0.7	Cara	1, -1	-1, 1
0.3	Coroa	-1, 1	1, -1

- Qual a utilidade do jogador 1?

		0.3 Cara	0.7 Coroa
0.7	Cara	1, -1 (0.21)	-1, 1 (0.49)
0.3	Coroa	-1, 1 (0.09)	1, -1 (0.21)

$$\begin{aligned} u_1(s) &= \sum_{a \in A} u_1(a) Pr(a|s) \\ &= 1 \cdot 0.21 + (-1) \cdot 0.49 + (-1) \cdot 0.09 + 1 \cdot 0.21 \\ &= -0.16 \end{aligned}$$

- Intuitivamente se qualquer jogador tiver uma distribuição diferente de (0.5, 0.5) o outro jogador poderia ajustar sua estratégia para tirar proveito disso.

		0.3 Cara	0.7 Coroa
0.7	Cara	1, -1 (0.21)	-1, 1 (0.49)
0.3	Coroa	-1, 1 (0.09)	1, -1 (0.21)

$$\begin{aligned} u_2(s) &= \sum_{a \in A} u_2(a) Pr(a|s) \\ &= (-1) \cdot 0.21 + 1 \cdot 0.49 + 1 \cdot 0.09 + (-1) \cdot 0.21 \\ &= 0.16 \end{aligned}$$

- Pois bem, os jogadores são simétricos, será que o j1 está feliz com a sua estratégia?
- O jogo não está em equilíbrio

		0.5 Cara	0.5 Coroa
0.5	Cara	1, -1 (0.25)	-1, 1 (0.25)
0.5	Coroa	-1, 1 (0.25)	1, -1 (0.25)

$$\begin{aligned} u_1(s) &= \sum_{a \in A} u_1(a) Pr(a|s) \\ &= 1 \cdot 0.25 + (-1) \cdot 0.25 + (-1) \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.25 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Nesse caso se ambos os jogadores ajustarem suas estratégias para 0.5 e 0.5. Nenhum deles terá incentivo para mudar.
- Temos então um **equilíbrio de Nash**.

No jogo da coordenação (0.5, 0.5) também formam um equilíbrio. Embora não seja o perfil de estratégia que maximiza a recompensa dos jogadores. Se ambos decidem jogar dessa forma, nenhum tem incentivo de mudar.

		0.5 Esq	0.5 Dir
0.5	Esq	1, 1	0, 0
0.5	Dir	0, 0	1, 1

No Dilema do prisioneiro, vimos que $\langle \text{Delatar}, \text{Delatar} \rangle$ era um equilíbrio de Nash. E nesse caso um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, que são únicos.

j1 \ j2	Calar	Delatar
Calar	-1, -1	-4, 0
Delatar	0, -4	-3, -3

Encontrando um equilíbrio de Nash

- No geral é difícil calcular um equilíbrio de Nash de estratégia mista.
- Mas fica mais fácil se soubermos qual é o suporte dos jogadores.
- Na Batalha do Relacionamento vamos procurar um equilíbrio onde todas as ações são partes do suporte.

	CR	TR
CR	2, 1	0, 0
TR	0, 0	1, 2

	p CR	$1-p$ TR
CR	2, 1	0, 0
TR	0, 0	1, 2

- Se o jogador 1 vai responder com uma melhor resposta mista, o jogador 2 deve fazer o jogador 1 indiferente entre CR e TR. Por que?

$$u_1(\langle CR, (p, 1-p)\rangle) = u_1(\langle TR, (p, 1-p)\rangle)$$
$$2p + 0(1-p) = 0p + 1(1-p)$$
$$p = \frac{1}{3}$$

		CR	TR
q	CR	2, 1	0, 0
1-q	TR	0, 0	1, 2

- Analogamente o jogador 1 deverá fazer o jogador 2 indiferente.

$$u_2(\langle(q, 1-q), CR\rangle) = u_2(\langle(q, 1-q), TR\rangle)$$
$$q + 0(1-q) = 0q + 2(1-p)$$
$$q = \frac{2}{3}$$

- Dessa, forma as estratégias mistas $\left\langle\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\rangle$ formam um equilíbrio de Nash.

- As estratégias mistas podem ser entendidas como uma descrição do que aconteceria em **jogos repetidos** com a contagem de estratégias puras.
- Também podem ser vistas como a **dinâmica de população**. Se eu escolher 2 agentes da população, todos tendo estratégias determinísticas. A estratégia mista dará a proporção de cada ação na população.

Interpretando um Equilibrio de Estratégia Mista

- Aleatorizar para **confundir** o seu oponente, exemplo da combinação de moedas.
- No exemplo da batalha do relacionamento, nós queremos coordenar as ações dos jogadores, então não faz sentido eles tentarem confundir um ao outro. Nesse caso devemos interpretar a aleatorização como um reflexo das **incertezas** sobre a ação dos outros.