Teoria dos Jogos

Hokama PhD

22 de junho de 2023

Referências

- Game Theory, Stanford University on Coursera. Matthew O. Jackson, Yoav Shoham e Kevin Leyton-Brown. `https://www.coursera.org/learn/game-theory-1`
- Algorithmic Game Theory, Stanford Fall 2013, Tim Roughgarden. `https://timroughgarden.org/f13/f13.html`
- Twenty lectures on algorithmic game theory. Tim Roughgarden. Cambridge University Press, 2016.
- Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação. In: Anais do 30 o Colóquio Brasileiro de Matemática. Schouery, R. C. S., Lee, O., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. Rio de Janeiro. Editora do IMPA, 2015.

O Núcleo

- O Valor de Shapley define uma forma "justa" de dividir o pagamento da grande coalizão entre seus membros.
- Entretanto essa análise ignora a questão da estabilidade.
- Os agentes vão preferir formar a grande coalizão dado a forma como o pagamento foi dividido, ou alguns deles vão preferir formar coalizões menores?
- Algumas vezes coalizões menores podem ser mais atrativas, mesmo que leve a um valor total menor.

Exemplo: Jogo de Votação

- Quatro partidos políticos, A, B, C e D, cada um com 45, 25, 15 e 15 votos respectivamente. Vão votar para passar 100 milhões de orçamento e como esse orçamento será dividido entre eles. O mínimo de 51 votos é necessário para passar qualquer lei que permita o repasse.
- Valores de Shapley: (50, 16.67, 16.67, 16.67)
- Uma subcoalizão pode ganhar mais desviando da grande coalizão? Se A e B se juntarem e dividirem os 100 milhões entre eles (75, 25) por exemplo.

- Sob qual divisão os agentes iriam querem formar a grande coalizão?
- Eles vão querer isso se o somente se o perfil de pagamento faz parte de um conjunto chamado **o núcleo**.

Definição: Core

Um vector de pagamento x está no **núcleo** de um jogo de coalizão (N, v), se e somente se,

$$\forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

- A soma dos pagamentos de qualquer subconjunto de agentes é maior na Grande coalizão do que se desviarem para formarem uma subcoalizão.
- é análogo a um equilíbrio de Nash, exceto que nesse caso os agentes podem desviar em grupo.

1. O núcleo sempre é não-vazio? (Sempre conseguimos uma função de pagamento que faça todos cooperarem?)
2. O núcleo é único?

O núcleo sempre é não-vazio? Não

- Considere o jogo de votação.
- as Coalizões mínimas para ter os 51 votos são: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$ e $\{B, C, D\}$.
- Se a soma dos pagamentos aos partidos B, C e D for menor que 100 milhões, eles tem incentivo de desviar.
- Se for de 100 milhões, A não ganha nada e tem incentivo a formar uma coalizão com o agente que está ganhando menos.
- Então esse núcleo é vazio.

(quando existe) O núcleo é único? Não

- Considere a mesma quantidade de votos, mas agora são necessários 80 para aprovar o repasse.
- as Coalizões mínimas para ter os 80 votos são: $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$.
- Note que agora A e B são essenciais para a votação de forma que qualquer distribuição dos 100 milhões entre eles faz parte do núcleo.

Definição: Jogo Simples

Um jogo $G = (N, v)$ é **simples** se para todo $S \subset N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.

Definição: Poder de Veto

Um jogador i tem o **poder de veto** de $v(N \setminus \{i\}) = 0$

Teorema

Em um jogo simples o núcleo é vazio se e somente se não existe agente com poder de veto. Se existe agentes com poder de veto, o núcleo consiste de todos os vetores de pagamento nos quais os jogadores SEM poder de veto ganham 0.

Exemplo: Jogo do Aeroporto

Algumas cidades próximas precisam suprir a necessidade por aeroportos. Cidades maiores precisam de aviões maiores, e portanto aeroportos maiores.
Cada cidade pode construir seu aeroporto, ou podem construir um regional, dividindo os custos. Entretanto o custo depende do maior avião.
Podemos modelar esse jogo como (N, v), $v(S)$ é a soma dos custos de construir aeroportos em cada cidade de S menos o custo de construir o maior aeroporto de S.

Jogos Convexos

Definição: Jogo convexo

Um jogo $G = (N, v)$ é **convexo** se para todo $S, T \subset N$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T)$.

- Convexidade é uma condição mais forte que superaditividade.
- O jogo do aeroporto é convexo.

Teorema

Todo Jogo convexo tem um núcleo não vazio.

Teorema

Em todo jogo convexo, o Valor de Shapley está no núcleo.

Exemplo

O conselho de segurança da ONU tem 15 membros:

- 5 membros permanentes: China, França, Rússia, Reino Unido e Estados Unidos.
- 10 membros rotativos.
- Os 5 membros permanentes tem poder de veto.

O conselho de segurança da ONU como um jogo de coalizão.

- China, França, Rússia, Reino Unido e Estados Unidos são $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- $v(S) = 1$ se $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset S$ e $|S| \geq 8$
- $v(S) = 0$ caso contrário.

Versão Simplificada

Um jogo com três jogadores com uma estrutura similar

- 1 membro permanente com poder de voto e 2 rotativos.
- $v(S) = 1$ se $1 \in S$ e $|S| \geq 2$
- $v(S) = 0$ caso contrário.

Versão Simplificada

$v(S) = 1$ se $1 \in S$ e $|S| \geq 2$, $v(S) = 0$ caso contrário.

- Calcular o núcleo
- Calcular o Valor de Shapley.