Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Lógica matemática

Lógica Proposicional

Uma **proposição** é uma sentença declarativa que ou é verdadeira ou é falsa. Exemplos:

1. **O morcego é um mamífero**.
2. **Rio de Janeiro é a capital do Brasil**.
3. **Há 36 macacos no zoológico de Londres**.
4. **A taxa de juros do Banco Central vai subir amanhã**.
5. **O trilionésimo algarismo decimal de π é 7**.

Não é necessário que saibamos se a sentença é verdadeira ou falsa.

1. Este fato pode depender de informações que não temos no momento: **Há 36 macacos no zoológico de Londres**.
2. de eventos que ainda não aconteceram: **A taxa de juros do Banco Central vai subir amanhã**.
3. ou de cálculos que não temos recursos para realizar: **O trilionésimo algarismo decimal de π é 7**.

Não são proposições:

1. frases interrogativas, como "**O que é isto?**",
2. frases imperativas, como "**Leia com cuidado**",
3. certas sentenças auto referentes, como "**Esta frase é falsa**".

Uma sentença declarativa que **depende de variáveis** pode ser considerada uma proposição em um contexto onde as variáveis **tem valor determinado**.

- "x **é menor que 3**" isoladamente não é uma proposição.
- se x for definido, ela se torna uma proposição.

Dizemos que o **valor lógico** ou **valor-verdade** de uma proposição é **verdadeiro** se ela for verdadeira, e **falso** caso contrário.

Conectivos lógicos e proposições compostas

Todas as línguas naturais possuem **conectivos lógicos**, como "e", "ou", "não", "se . . . então", que permitem combinar proposições simples para formar proposições mais complexas. Por exemplo,

- [**Brasília é a capital do Brasil,**] **e** [**Montevidéu é a capital da Argentina**].
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] **ou** [**Montevidéu é a capital da Argentina**].

- **Se** [**a taxa de juros cair amanhã**], **então** [**a inflação vai aumentar neste mês**].
- **Não** [**haverá sessão da meia-noite hoje neste cinema**].

- Uma proposição que não pode ser decomposta em proposições menores ligadas por conectivos lógicos é dita uma **proposição simples** ou **atômica**.
- O valor lógico (**verdadeiro** ou **falso**) de uma proposição deste tipo depende do valor lógico das proposições simples que a compõem, e da maneira como elas são combinadas pelos conectivos.

- se sabemos que a proposição "**Brasília é a capital do Brasil**" é verdadeira,
- e "**Montevidéu é a capital da Argentina**" é falsa,
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] **e** [**Montevidéu é a capital da Argentina**]. É falsa.
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] **ou** [**Montevidéu é a capital da Argentina**]. É verdadeira.

Notação para cálculo proposicional

Lógica proposicional, ou **cálculo proposicional**: Permite determinar o valor lógico de proposições compostas, se soubermos os valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Para **eliminar as ambiguidades** das linguagens naturais iremos usar uma **notação algébrica**.

Proposições serão representadas por letras minúsculas ($p, q, r, ...$).

Podem ter dois valores:

V representando verdadeiro e **F** representando falso.

Os conectivos lógicos serão representados por sinais algébricos especiais (**operadores**) aplicados a essas variáveis. Os mais importantes são:

- **conjunção**: $p \wedge q$, significando "p e q".
- **disjunção**: $p \vee q$, significando "p ou q".
- **negação**: $\neg p$, significando "não p".
- **implicação**: $p \rightarrow q$, significando "se p, então q".
- **equivalência**: $p \leftrightarrow q$, significando "p se, e somente se, q".

Operador de conjunção

Se p, q são duas proposições, então "p e q", denotado por $p \wedge q$ também é uma proposição, chamada **conjunção** de p e q. $p \wedge q$ é verdadeiro se p e q forem verdadeiros.

p	q	$p \wedge q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Operador de conjunção

A frase "José compra tijolos e vende casas" é uma conjunção de duas proposições atômicas, "(José compra tijolos) $\wedge$ (José vende casas)."

A palavra “e” em português tem vários sentidos diferentes.

“Maria gosta de arroz e feijão”

Não significa “(Maria gosta de arroz) e (Maria gosta de feijão)”

Mas sim “Maria gosta de arroz misturado com feijão” (uma proposição atômica).

Operador de disjunção

Se p, q são duas proposições, então “p ou q” também é uma proposição, chamada de **disjunção** de p e q.

$$p \vee q$$

É Verdadeiro se pelo menos uma das duas proposições for verdadeira. Se ambas forem falsa $p \vee q$ é falso.

Operador de disjunção

p	q	$p \vee q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Operador de disjunção

A frase “O cliente tem celular ou laptop” é uma disjunção de duas proposições atômicas, “(O cliente tem celular) $\vee$ (O cliente tem laptop)”.

Este conectivo é também chamado de “ou inclusivo”.

Operador de negação

A partir de uma proposição p, podemos formar uma nova proposição com o valor lógico oposto ao de p.

Essa nova proposição é chamada a **negação** de p e denotada por $\neg p$.

p	$\neg p$
V	**F**
F	**V**

A frase "A casa é de qualquer cor menos branca." é uma negação, "¬(A casa é branca)."

Exercício

Uma proposição composta é **viável** ou **possível** se existe uma atribuição de valores verdades para as variáveis da proposição que a torna verdadeira. Verifique quais das proposições abaixo são viáveis.

a) $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$.

Exercício

b) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$.

c) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$.

Operador de implicação

Sejam p, q duas proposições. A proposição "se p então q", que denotaremos por $p \rightarrow q$, é chamada de **implicação** ou **condicional**.

O valor lógico de $p \rightarrow q$ é falso apenas se p for verdadeiro e q for falso. Nos demais casos, o valor de $p \rightarrow q$ é verdadeiro.

Operador de implicação

p	q	$p \to q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Operador de implicação

Em lógica, este conectivo não pressupõe uma relação causal entre p e q.

Por exemplo a sentença:

"se 2 é par então Brasília é a capital do Brasil" é verdadeira apesar de não haver nenhuma relação conhecida entre os dois fatos.

Uma outra notação usada para este operador é $p \Rightarrow q$.

Operador de implicação

A frase "se José foi para casa, ele perdeu a reunião" contém uma implicação: "(José foi para casa) $\to$ (José perdeu a reunião)."

Operador de implicação

Muitos teoremas em matemática estão na forma de implicações:

Se determinada afirmação p (a **hipótese**, **premissa**, ou **antecedente**) é verdadeira, então outra afirmação q (a **tese**, **conclusão** ou **consequência**) também é verdadeira.

Operador de implicação

Em português, a implicação pode ser expressa de muitas outras formas:

- se p então q.
- quando p, temos q.
- caso p, vale q.
- q segue de p.
- p implica q.
- q se p.
- q sempre que p.

Operador de implicação

Em matemática, as seguintes expressões também são muito usadas para indicar a implicação $p \to q$:

- p é condição suficiente para q.
- p somente se q.
- Uma condição suficiente para q é p.
- p é uma condição mais forte que q.

Operador de implicação - Reciproca

Dizemos que a implicação

$$q \to p$$

é a **recíproca** de

$$p \to q.$$

Observe que que há casos em que $p \to q$ é verdadeira, mas sua reciproca $q \to p$ é falsa.

Operador de implicação - Inversa

A proposição $(\neg p) \to (\neg q)$ é chamada de **inversa** de $p \to q$. Observe que há casos em que $p \to q$ é verdadeira, mas sua inversa é falsa; e vice-versa

Operador de implicação - Contrapositiva

Dizemos também que proposição

$$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$$

é a **contrapositiva** de

$$p \rightarrow q.$$

A contrapositiva tem sempre o mesmo valor lógico que a proposição $p \rightarrow q$, quaisquer que sejam os valores lógicos de p e de q.

Em vista deste resultado, a implicação $p \rightarrow q$ é frequentemente enunciada na forma contrapositiva:

- se não q, então não p.
- se q não vale, então p não vale.
- quando q é falsa, p também é falsa.
- não q implica não p.
- não p se não q.
- p é falsa sempre que q é falsa.
- q é mais fraco que p.
- q é condição necessária para p.
- Uma condição necessária para p é q.

Exercício

Encontre:

a) A contrapositiva de $\neg p \rightarrow q$.
b) A recíproca de $\neg q \rightarrow p$.
c) A inversa da recíproca de $q \rightarrow \neg p$.
d) A negação de $p \rightarrow \neg q$.
e) A recíproca de $\neg p \rightarrow q$.

Operador de equivalência

Se p, q são duas proposições, a proposição "p se, e somente se, q" é chamada de **equivalência** ou **bicondicional** de p e q.

$$p \leftrightarrow q$$

O valor lógico de $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro quando p e q tem o mesmo valor lógico, e falso caso contrário.

Operador de equivalência

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Operador de equivalência

A frase "a encomenda será enviada se, e somente se, o cheque tiver fundo" afirma uma equivalência lógica: "[a encomenda será enviada] $\leftrightarrow$ [o cheque tem fundo]."

Outros símbolos usados para este operador são $p \Leftrightarrow q$, $p \equiv q$, e $p = q$.

O conectivo lógico "se e somente se" também é muito usado em matemática, e pode ser expresso de várias outras maneiras; como, por exemplo:

- p é condição necessária e suficiente para q.
- as condições p e q são equivalentes.
- se p então q, e se q então p.
- p implica q, e vice-versa.

Alguns autores usam a abreviação "p sse q" (com dois "s") para significar "p se e somente se q". (em inglês iff)

Operador de disjunção exclusiva

Se p, q são duas proposições, denotamos por $p \oplus q$ a proposição "ou p ou q, mas não ambos." Este conectivo é chamado de **disjunção exclusiva** de p e q.

O valor lógico de $p \oplus q$ é verdadeiro se p e q tem valores lógicos opostos, ou seja, exatamente um deles é verdadeiro.

Operador de disjunção exclusiva

p	q	$p \oplus q$
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Operador de disjunção exclusiva

É importante observar que, em português, o conectivo "ou" pode significar tanto a disjunção inclusiva ($\vee$) quanto a disjunção exclusiva ($\oplus$).

"o original foi enviado pelo correio, ou pelo malote,"

"a bateria está descarregada ou o tanque está vazio"

Precedência dos operadores lógicos

Qual o valor lógico de:

$$p \vee q \wedge r$$

Podemos sempre usar parênteses para indicar a ordem correta, por exemplo $(p \vee q) \wedge r$ ou $p \vee (q \wedge r)$.

Precedência dos operadores lógicos

Operador	*Precedência*
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee, \oplus$	3
$\rightarrow, \leftrightarrow$	4

Precedência dos operadores lógicos

Associatividade

Em matemática, diz-se que uma operação $\star$ é **associativa** se $(x \star y) \star z$ é igual a $x \star (y \star z)$, quaisquer que sejam x, y, e z. Nesse caso, podemos omitir os parênteses dessas duas fórmulas, e escrever simplesmente $x \star y \star z$.
A soma e a multiplicação de números reais, por exemplo, são operações associativas; enquanto que a subtração não é.

Precedência dos operadores lógicos

Dentre os conectivos lógicos que vimos até agora, $\vee$, $\wedge$, $\oplus$ e $\leftrightarrow$ são associativos. Portanto, podemos escrever $p \vee q \vee r$, $p \wedge q \wedge r$, ou $p \oplus q \oplus r$, ou $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$, sem risco de ambiguidade.

Por outro lado, a fórmula $p \to q \to r$ é ambígua, pois $(p \to q) \to r$ não é equivalente a $p \to (q \to r)$.

Precedência dos operadores lógicos

Normalmente avaliamos operadores de mesma precedência da esquerda para a direita. Porém é aconselhável sempre usar parênteses.

Note que esta convenção também é usada em álgebra: a fórmula $x - y - z$ deve ser entendida como $(x - y) - z$, e não como $x - (y - z)$. A mesma regra poderia ser usada para interpretar $p \oplus q \vee r$.