Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Afirmações auto-referentes

Já mencionamos que a afirmações que referem a si mesmas, como “esta sentença é falsa”, não são proposições lógicas. Tais afirmações, relacionadas com o Paradoxo do Barbeiro, sempre foram um problema para a lógica matemática, que não tem maneiras satisfatórias de lidar com elas.

Afirmações auto-referentes

Este problema surge mesmo quando há várias afirmações que se referenciam entre si. Por exemplo, na frase “a sentença seguinte é falsa, e a sentença anterior é verdadeira”, embora possa ser analisada como uma conjunção $p \wedge q$, não é uma afirmação lógica porque p é uma afirmação sobre q e vice-versa.

Manipulação lógica de proposições

O objetivo da lógica proposicional é identificar as deduções e transformações de proposições compostas cuja validade independe da natureza das suas proposições atômicas, e dos valores lógicos destas.

$p \wedge (p \wedge q)$ pode ser substituída por $p \wedge q$;

Tautologias e contradições

Uma **tautologia** é uma proposição composta que é sempre verdadeira, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Ou seja, uma proposição composta é uma tautologia se e somente se a coluna de resultado de sua tabela-verdade contém somente valores lógicos verdadeiros (**V**).

Tautologia

Por exemplo, a proposição $p \vee (\neg p)$ tem a seguinte tabela-verdade:

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
V	**F**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**V**	**V**

A tautologia mais simples é V.

Contradição

Uma **contradição** é uma proposição composta que é sempre falsa, quaisquer que sejam os valores lógicos das suas proposições atômicas.
Portanto, uma proposição composta é uma contradição se, e somente se, sua tabela-verdade contém somente **F** na sua coluna final.
É fácil ver que a proposição $p \wedge (\neg p)$ é uma contradição.

Contradição

Em particular, a negação de uma tautologia é sempre uma contradição, e a negação de uma contradição é uma tautologia.

A contradição mais simples é **F**.

Construa as tabelas-verdade das proposições abaixo, e determine se elas são tautologias, contradições, ou nem uma nem outra.

a) $(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$.
b) $\neg p \rightarrow p$.
c) $\neg p \leftrightarrow p$.
d) $(p \wedge \neg p) \rightarrow p$.
e) $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$.
f) $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$.
g) $((p \oplus q) \oplus (q \oplus p))$.

Equivalência lógica

Duas proposições compostas $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são ditas **equivalentes** se elas têm valores lógicos iguais, para quaisquer combinações de valores lógicos que sejam atribuídos às suas proposições atômicas.

Em outras palavras, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são equivalentes se e somente se $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ é uma tautologia.

Equivalência lógica

Por exemplo, podemos verificar, pela tabela-verdade, que as proposições compostas "$p \wedge (\neg q)$"e "$\neg((\neg p) \vee q)$"são equivalentes, ou seja, que $p \wedge (\neg q) \leftrightarrow \neg((\neg p) \vee q)$"é uma tautologia:

p	q	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$\neg((\neg p) \vee q)$	$(p \wedge (\neg q)) \leftrightarrow \neg((\neg p) \vee q)$
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**

Equivalência lógica

Assim como a propriedade de ser tautologia ou de ser contradição, a equivalência lógica de duas proposições depende apenas da sua forma, e não depende do significado das proposições atômicas que ocorrem nela. Assim, por exemplo, a proposição $p \leftrightarrow q$ pode ser verdadeira, dependendo das proposições p e q; mas nem por isso p é logicamente equivalente a q.

Equivalência lógica

- Uma tautologia é logicamente equivalente a **V**.
- Uma contradição é logicamente equivalente a **F**.

Alguns autores escrevem usam $\Leftrightarrow$ ou $\equiv$ para dizer que p é logicamente equivalente a q, mas isso não deve ser confundido com o operador lógico.

Equivalências lógicas importantes

- **Leis de elemento identidade**:
  - $p \wedge \mathbf{V}$ equivale a p
  - $p \vee \mathbf{F}$ equivale a p
  - $p \leftrightarrow \mathbf{V}$ equivale a p
  - $p \oplus \mathbf{F}$ equivale a p
- **Leis da negação dupla**
  - $\neg(\neg p)$ equivale a p
- **Leis da idempotência**:
  - $p \wedge p$ equivale a p
  - $p \vee p$ equivale a p

- **Leis de dominação**:
  - $p \vee \mathbf{V}$ equivale a $\mathbf{V}$
  - $p \wedge \mathbf{F}$ equivale a $\mathbf{F}$
- **Leis da comutatividade**:
  - $p \vee q$ equivale a $q \vee p$
  - $p \wedge q$ equivale a $q \wedge p$
  - $p \leftrightarrow q$ equivale a $q \leftrightarrow p$
  - $p \oplus q$ equivale a $q \oplus p$
- **Leis da associatividade**:
  - $(p \vee q) \vee r$ equivale a $p \vee (q \vee r)$
  - $(p \wedge q) \wedge r$ equivale a $p \wedge (q \wedge r)$
  - $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ equivale a $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
  - $(p \oplus q) \oplus r$ equivale a $p \oplus (q \oplus r)$

- **Leis da distributividade**:
  - $p \vee (q \wedge r)$ equivale a $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $p \wedge (q \vee r)$ equivale a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  - $p \wedge (q \oplus r)$ equivale a $(p \wedge q) \oplus (p \wedge r)$
- **Leis de De Morgan**:
  - $\neg(p \wedge q)$ equivale a $\neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q)$ equivale a $\neg p \wedge \neg q$
- **Leis da implicação**
  - $(p \to q)$ equivale a $(\neg p \vee q)$
  - $\neg(p \to q)$ equivale a $(p \wedge \neg q)$

- **Leis da equivalência**
  - $(p \leftrightarrow q)$ equivale a $(p \to q) \wedge (q \to p)$
  - $(p \leftrightarrow q)$ equivale a $\neg(p \oplus q)$
- **Lei da contrapositiva**:
  - $(p \to q)$ equivale a $(\neg q) \to (\neg p)$
- **Lei da redução ao absurdo**:
  - $p \to q$ equivale a $(p \wedge \neg q) \to \mathbf{F}$

Exercício: Verifique quais das seguintes afirmações são corretas:

1. $(\neg p \wedge (p \vee q))$ é logicamente equivalente a q.
2. $((p \to q) \to r)$ é logicamente equivalente a $(p \to (q \to r))$

Implicação entre fórmulas lógicas

- Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ duas fórmulas lógicas que dependem de uma certa coleção de variáveis lógicas. Dizemos que $\mathcal{F}$ **implica logicamente** $\mathcal{G}$ se a fórmula $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é uma tautologia.
- Para qualquer combinação de valores atribuídos às variáveis que ocorrem nessas fórmulas, a proposição $\mathcal{F}$ é falsa, ou $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são ambas verdadeiras.

- Essa afirmação é denotada $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$, que pode ser interpretada como "$\mathcal{G}$ é uma consequência lógica de $\mathcal{F}$"

Exemplo: Seja $\mathcal{F}$ a fórmula $p \wedge q$ e $\mathcal{G}$ a fórmula $p \vee q$. As tabelas-verdade de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ são

		$\mathcal{F}$	$\mathcal{G}$	$(\mathcal{F}) \to \mathcal{G})$
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to (p \vee q)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**

Implicação entre fórmulas lógicas

Mais geralmente, sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ uma coleção de proposições. Dizemos que essas proposições **implicam logicamente** $\mathcal{G}$ se, e somente se,

$$(\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{F}_n) \to \mathcal{G}$$

é uma tautologia.

Implicação lógica

Listaremos algumas implicações lógicas mais conhecidas. As letras p, q, r representam proposições arbitrárias.

- **Lei da adição**:
  - p implica logicamente $p \vee q$
- **Lei da simplificação**:
  - $p \wedge q$ implica logicamente p
- **Lei do modus ponens**:
  - p e $p \to q$ implicam logicamente q
- **Lei do modus tollens**:
  - $p \to q$ e $\neg q$ implicam logicamente $\neg p$

- **Silogismo hipotético**:
  - $p \to q$ e $q \to r$ implicam logicamente $p \to r$
- **Silogismo disjuntivo**:
  - $p \vee q$ e $\neg p$ implicam logicamente q
- **Demonstração por absurdo**:
  - $p \to \mathbf{F}$ implica logicamente $\neg p$

Equivalência em contexto específico

As fórmulas $p \leftrightarrow q$ e $p \wedge q$ não são equivalentes; pois, quando substituímos $p = \mathbf{F}$ e $q = \mathbf{F}$, a primeira é verdadeira e a segunda é falsa.

Porém, se soubermos de alguma maneira, que a afirmação $p \vee q$ é verdadeira, então a combinação $p = \mathbf{F}$ e $q = \mathbf{F}$ não pode ocorrer.

Equivalência em contexto específico

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
F	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**
V	**V**	**V**	**V**	**V**

$p \leftrightarrow q$ é logicamente equivalente à $p \wedge q$, se $p \vee q$ for verdadeira.

Síntese de proposições

Dada uma tabela-verdade com determinadas variáveis lógicas, é sempre possível construir uma proposição composta com essas mesmas variáveis que tem essa tabela-verdade.

Escrevendo para cada linha com o resultado verdadeiro uma sub-fórmula lógica que é verdadeira para essa combinação de valores das variáveis, e falsa para todas as outras combinações.

p	q	$\mathcal{F}$
F	**F**	**F**
F	**V**	**V**
V	**F**	**V**
V	**V**	**F**

Para a linha 2, precisamos de uma sub-fórmula que seja **V** apenas quando $p = \mathbf{F}$ e $q = \mathbf{V}$. Para isso podemos usar a fórmula $(\neg p) \wedge q$. Para a linha 3, a fórmula é $p \wedge (\neg q)$. A proposição desejada é então

$$((\neg p) \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$$

Forma normal disjuntiva

A sub-fórmula correspondente a cada linha com resultado **V** é uma conjunção de todas variáveis ou de suas negações. Especificamente, uma variável deve ser negada na sub-fórmula se e somente se nessa linha ela tem valor **F**.

A fórmula obtida desta maneira — uma disjunção de conjunções, cujos termos são variáveis ou suas negações — é chamada de **forma normal disjuntiva**.

Forma normal conjuntiva

Outra maneira de construir uma proposição a partir de sua tabela-verdade é considerar cada linha em que o resultado desejado é **F**, e escrever uma fórmula que é falsa apenas para essa combinação de variáveis.

Esta fórmula pode ser uma disjunção das variáveis e suas negações. A conjunção dessas fórmulas é a proposição desejada.

p	q	$\mathcal{F}$
F	**F**	**F**
F	**V**	**V**
V	**F**	**V**
V	**V**	**F**

- Primeira linha: $(p \vee q)$
- Quarta linha: $((\neg p) \vee (\neg q))$
- A formula obtida: $(p \vee q) \wedge ((\neg p) \vee (\neg q))$
- A fórmula assim obtida é chamada de **forma normal conjuntiva**.

Sistemas completos de operadores

A construção da forma normal disjuntiva (ou conjuntiva) permite concluir que toda proposição composta, usando quaisquer conectivos, é logicamente equivalente a outra proposição que usa apenas os conectivos $\vee$, $\wedge$ e $\neg$. Dizemos então que estes três conectivos formam um **sistema completo** de operadores lógicos.

Dualidade lógica

Seja p uma proposição que usa apenas os conectivos $\vee$, $\wedge$, e $\neg$. A **proposição dual** é obtida a partir de p trocando-se toda ocorrência de $\vee$ por $\wedge$, e vice-versa; bem como toda ocorrência de **V** por **F**, e vice-versa. Por exemplo, a dual da proposição $(p \wedge \neg q) \vee r$ é $(p \vee \neg q) \wedge r$. A dual de uma proposição p é geralmente denotada por p^*. Note que $(p^*)^*$, a dual da dual, é a proposição original p.