

Matemática Discreta

Pedro Hokama

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matemática Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

1/28

2/28

Implicação com tese conjuntiva

- Queremos provar que $p \rightarrow (q \wedge r)$
- Que é logicamente equivalente à $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
- Basta provar cada uma separadamente.

Teorema 4.4: Se 6 divide um inteiro n , então 2 divide n e 3 divide n .

Prova:

Se 6 divide n então existe um inteiro k tal que $n = 6k$. Então, $n = 2(3k)$, logo 2 divide n . Temos também que $n = 3(2k)$, logo 3 divide n . Portanto 2 divide n e 3 divide n .

Fim.

3/28

4/28

Implicação com hipótese disjuntiva

- Queremos provar $(p \vee q) \rightarrow r$
- Equivale à $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
- Basta provar cada uma dessas partes.

5/28

Teorema 4.5: Para quaisquer inteiros m e n , se m for par ou n for par, então mn é par.

Prova:

Sejam m e n inteiros quaisquer. Temos dois casos:

- Caso 1: m é par. Pela definição, existe um inteiro q tal que $m = 2q$. Nesse caso, $mn = (2q)n = 2(nq)$, e portanto mn é par.
- Caso 2: n é par. Pela definição, existe um inteiro r tal que $n = 2r$. Nesse caso $mn = m(2r) = 2(mr)$, e portanto mn é par.

Portanto, se m é par ou n é par, mn é par. **Fim.**

6/28

Demonstrações de afirmações “se e somente se”

Outro tipo comum de teorema tem a forma $p \leftrightarrow q$, ou seja, “ p vale se e somente se q vale.”

- Equivalente à $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- Dividimos a demonstração em duas partes.
 - (1) prova que $p \rightarrow q$ (ida);
 - (2) prova que $q \rightarrow p$ (volta);

7/28

Teorema 4.7: Os inteiros x e y são ambos ímpares se, e somente se, o produto xy é ímpar.

Prova:

Sejam x e y inteiros quaisquer.

- Parte (1) (\rightarrow): provaremos que, se x e y são ímpares, então xy é ímpar. Se x e y são ímpares, por definição existem inteiros r e s tais que $x = 2r + 1$ e $y = 2s + 1$. Portanto $xy = (2r + 1)(2s + 1) = 2(rs + r + s) + 1$. Como $rs + r + s$ é um inteiro, concluímos que xy é ímpar.

8/28

- Parte (2) (\leftarrow): provaremos que, se xy é ímpar, então x e y são ambos ímpares. Ou seja (pela contrapositiva), que se x é par ou y é par, então xy é par. Temos dois casos (não exclusivos):
 - ▶ Caso (a): x é par. Neste caso existe um inteiro r tal que $x = 2r$. Portanto $xy = (2r)y = 2(ry)$. Como ry é inteiro, concluímos que xy é par.
 - ▶ Caso (b): y é par. Então existe um inteiro s tal que $y = 2s$. Portanto $xy = x(2s) = 2(xs)$. Como xs é inteiro, concluímos que xy é par.

Fim.

Instanciação universal

- Se provarmos que $(\forall x \in D) P(x)$,
- podemos afirmar $P(c)$ para qualquer elemento c do domínio D .
- “para todo inteiro x maior que 5, $2^x > x^2$ ”, podemos imediatamente concluir que $2^{418} > 418^2$.
- Esta regra é chamada de **instanciação universal**.

9/28

10/28

Generalização universal

- Agora suponha que desejamos provar $(\forall x \in D) P(x)$
- começar supondo que x é um elemento de D escolhido arbitrariamente
- Se, com essa suposição, conseguirmos provar a afirmação $P(x)$, provamos que o teorema original é verdadeiro.
- Este último passo é chamado de **generalização universal** ou **suspensão do quantificador universal**.

Teorema 4.10: Para quaisquer números reais x e y ,
 $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$.

Prova:

Sejam x e y dois números reais quaisquer.

Pelo teorema do binômio, temos $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, e

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Portanto,

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = 4xy.$$

Fim.

11/28

12/28

Demonstração por vacuidade

Lembre-se que se E é o conjunto vazio, a afirmação $(\forall x \in E) Q(x)$ é verdadeira, qualquer que seja o predicado Q . Esta afirmação é verdadeira **por vacuidade**.

- Queremos demonstrar $(\forall x \in D) P(x)$ para um domínio arbitrário D .
- Mostrar que ela é equivalente a outra afirmação $(\forall x \in E) Q(x)$
- Então mostrar que E é vazio.

13/28

Regras para quantificadores existenciais

- Se provamos que $(\exists x \in D) P(x)$,
- podemos supor, dali em diante, que a variável x é um dos elementos cuja existência é afirmada.
- Esta regra é chamada de **instanciação existencial**.
- Exemplo: Considere as seguintes premissas: “Um aluno desse curso não estudou” e “Todos os alunos desse curso foram aprovados” podemos concluir que “Algum aluno não estudou e foi aprovado”.

15/28

Teorema: Para todo número inteiro x , se $x^2 = 5$ então x é par.

- $(\forall x \in \mathbb{Z}) Q(x) \rightarrow P(x)$
- $Q(x)$ significa “ $x^2 = 5$ ”, e $P(x)$ é “ x é par”.
- $E = \{\forall x \in \mathbb{Z} : Q(x)\}$
- equivale à $(\forall x \in E) P(x)$.
- ou seja, E é o conjunto dos inteiros cujo quadrado é 5.
- Como E é vazio, a afirmação é verdadeira por vacuidade.

14/28

Demonstrações construtivas

- Agora suponha que queremos provar que $(\exists x \in D) P(x)$.
- Exibimos um elemento específico a do domínio D (explicitamente, ou através de uma construção algorítmica)
- $P(a)$ é verdadeira, para esse elemento.
- **Demonstração construtiva**

16/28

Teorema 4.11: Existem três números inteiros positivos tais que $x^2 + y^2 = z^2$.

Prova:

Sejam $x = 3$, $y = 4$, e $z = 5$. Como

$x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = z^2$, a afirmação é verdadeira.

Fim.

17/28

Teorema do deserto de primos: Para todo número inteiro positivo n , existe uma sequência de n números inteiros consecutivos que não são primos.

18/28

Prova: Seja n um inteiro positivo, e seja $x = (n + 1)! + 2$.

Observe que

$$2 \text{ divide } x = (n + 1)! + 2, \quad (1)$$

$$3 \text{ divide } x + 1 = (n + 1)! + 3, \quad (2)$$

$$\dots \quad (3)$$

$$n + 1 \text{ divide } x + (n - 1) = (n + 1)! + n + 1. \quad (4)$$

Logo todos os inteiros $x + i$ com $0 \leq i < n$ são não primos; e eles formam uma sequência de n inteiros consecutivos.

Fim.

19/28

Exercício:

- Existem 100 inteiros consecutivos que não são quadrados perfeitos.

20/28

Demonstrações não construtivas

- Em alguns casos, é possível demonstrar a existência de um elemento que satisfaz uma dada condição mesmo sem exibir explicitamente tal elemento.
- Uma demonstração deste tipo é chamada de **demonstração não construtiva**

21 / 28

Demonstração de existência e unicidade

- Queremos provar $(\exists!x \in D) P(x)$
- Logicamente equivalente à
$$((\exists x \in D) P(x)) \wedge ((\forall x \in D)(\forall y \in D) ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y))$$
Portanto, uma demonstração de existência e unicidade pode ser dividida em duas partes:
 - **Existência:** prova-se-se que existe pelo menos um x em D que satisfaz $P(x)$.
 - **Unicidade:** supõe-se que y também é um elemento de D que satisfaz $P(y)$, e prova-se que ele é igual ao x .

23 / 28

Teorema 4.14: Existem dois números reais irracionais x e y tais que x^y é racional.

Prova:

Sabemos que número $\sqrt{2}$ é irracional. Se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ for racional, a afirmação está satisfeita tomando-se $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$. Por outro lado, se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ for irracional, podemos tomar $x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$. Então $x^y = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ que é racional.

Fim.

22 / 28

Teorema: Mostre que se a e b são números reais e $a \neq 0$, então existe um único número real r tal que $ar + b = 0$

Prova: Note que o número real $r = -b/a$ é uma solução para $ar + b = 0$. Suponha então que s é um número real, tal que $as + b = 0$. Então $ar + b = as + b$. Subtraindo b dos dois lados e dividindo por a (que é diferente de 0), encontramos que $r = s$.

24 / 28

Demonstração de falsidade por contra-exemplo

- Demonstrações de existência são usadas, em particular, para refutar conjecturas da forma $(\forall x \in D) P(x)$; pois a negação desta afirmação é $(\exists x \in D) \neg P(x)$.
- Neste caso dizemos que o elemento x de D que comprovadamente não satisfaz $P(x)$.
- Portanto mostra a falsidade da conjectura

Considere a seguinte afirmação: “Para todo primo n , o inteiro $2^n - 1$ é primo.” Esta afirmação não é verdadeira, basta ver que o número $n = 11$ é um contra-exemplo, pois $P(11) = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.

25 / 28

26 / 28

Exercícios:

Demonstre (por meio de contra-exemplos) que as seguintes conjecturas são falsas:

- Todo inteiro positivo é soma dos quadrados de três inteiros.
- Se n é um número inteiro e $4n$ é par, então n é par.
- O produto de dois números irracionais é um número irracional.

Prove (ou mostre contra exemplos) de que as seguintes proposições são equivalentes

- a) $(\forall x \in D) P(x) \vee Q(x)$ e $((\forall x \in D) P(x)) \vee ((\forall x \in D) Q(x))$.
- b) $(\exists x \in D) P(x) \wedge Q(x)$ e $((\exists x \in D) P(x)) \wedge ((\exists x \in D) Q(x))$.

27 / 28

28 / 28