

Matemática Discreta

Pedro Hokama

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matemática Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

1/35

2/35

Indução Matemática

Indução Matemática

- Seja $P(n)$ uma sentença matemática que depende de uma variável natural n
- se torna verdadeira ou falsa quando substituímos n por um número natural dado qualquer
- Estas sentenças são chamadas **sentenças abertas definidas sobre o conjunto dos números naturais \mathbb{N}** .

3/35

4/35

- 1 $P(n)$: “ n é ímpar.” Observe que esta afirmação é verdadeira para alguns valores de n e falsa para outros.
- 2 $P(n)$: “ $n^2 - n + 41$ é um número primo.” Neste exemplo podemos verificar, não tão facilmente, que $P(1), P(2), \dots, P(40)$ são verdadeiros mas $P(41) = 41^2$ é falso.

5/35

- 3 $P(n)$: “ $2n + 6$ é par.” É fácil ver que $2n + 6 = 2(n + 3)$ para qualquer n , portanto $P(n)$ é verdade para todo n .
- 4 $P(n)$: “ $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.” Será que conseguiremos encontrar algum m tal que $P(m)$ seja falso?

6/35

Princípio de Indução Matemática

Como mostrar que

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

é verdade para qualquer n ?

O **princípio da indução matemática** (PIM) é a principal ferramenta para demonstrar sentenças da forma “ $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$ ”.

Ele diz o seguinte:

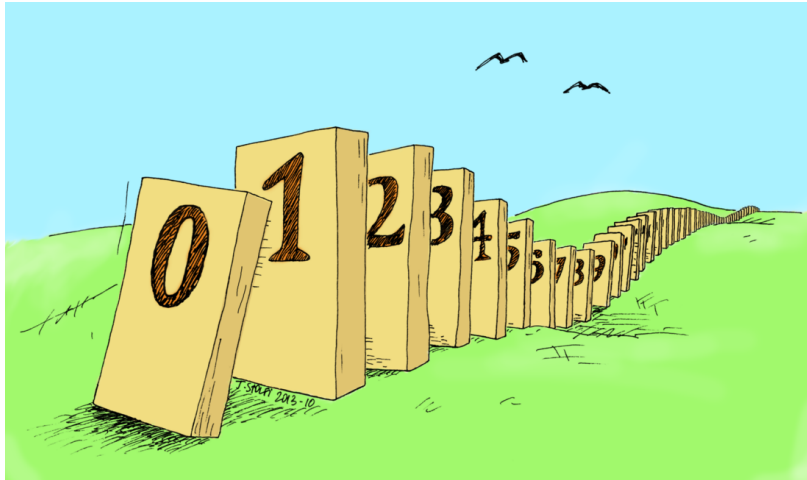
Axioma: Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre \mathbb{N} . Suponha que:

- 1 $P(0)$ é verdade, e
- 2 Sempre que $P(k)$ é verdade, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $P(k + 1)$ é verdade.

Então $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

7/35

8/35



Para demonstrar uma afirmação “ $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$ ” usando o PIM, podemos então seguir este roteiro:

- **Base da Indução:** Provar que $P(0)$ é verdade.
- **Hipótese de Indução:** Supor que para algum $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ é verdade.
- **Passo da Indução:** Provar que $P(k + 1)$ é verdade.

9/35

10/35

Exemplo

Provar que, para todo $n \geq 0$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = (n)^2$$

Prova: Vamos provar usando indução em n .

- **Base:** $P(0)$ é verdade pois a expressão acima é trivialmente válida para $n = 0$.
- **Hipótese de indução:** suponhamos que para algum k , $P(k)$ é verdade, isto é,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = (k)^2$$

Passo de indução: temos de provar que $P(k + 1)$ é verdade, isto é temos que provar que:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} [1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)] + (2(k + 1) - 1) &= \\ [k^2] + (2(k + 1) - 1) &= \\ k^2 + 2k + 2 - 1 &= \\ k^2 + 2k + 1 &= \\ (k + 1)^2 & \end{aligned}$$

11/35

12/35

Exemplo 2

Definição: Dizemos que um conjunto de n retas no plano **estão em posição geral** se não possui duas retas paralelas e nem três retas se interceptando num mesmo ponto.

Teorema

Um conjunto de n retas em posição geral divide o plano em

$$R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ regiões.}$$

Vamos provar por indução no número n retas de retas.

13/35

Passo da indução: temos que provar que quaisquer $k + 1$ retas em posição geral definem $R_{k+1} = (k + 1)(k + 2)/2 + 1$ regiões. Sejam L_1, L_2, \dots, L_{k+1} essas retas. Compare as regiões do plano definidas por elas, que chamaremos de **regiões novas**, com as **regiões velhas** definidas pelas primeiras k dessas retas. Observe que algumas das regiões velhas são divididas pela última reta L_{k+1} , cada uma delas formando duas regiões novas; enquanto que as demais regiões velhas são também regiões novas.

15/35

- **Base:** Para $n = 0$ temos apenas uma região. Como $R_0 = 0(0 + 1)/2 + 1 = 1$, a fórmula é válida neste caso.
- **Hipótese de indução:** Suponhamos que para algum k a fórmula é válida, isto é quaisquer k retas em posição geral dividem o plano em $R_k = k(k + 1)/2 + 1$ regiões.

14/35

Como as retas estão em posição geral, a reta L_{k+1} cruza cada uma das k retas anteriores em k pontos distintos. Em cada um desses cruzamentos, a reta L_{k+1} passa de uma região velha para outra. Essas regiões são duas a duas distintas porque estão em lados opostos de alguma reta L_i , com $1 \leq i \leq k$. Portanto a reta L_{k+1} corta $k + 1$ regiões velhas, que dão origem a $2(k + 1)$ regiões novas. Ou seja,

$$R_{k+1} = R_k - (k + 1) + 2(k + 1) = R_k + (k + 1)$$

16/35

Como as retas L_1, L_2, \dots, L_k estão em posição geral, podemos usar a hipótese de indução. Obtemos

$$R_k + (k + 1) = k(k + 1)/2 + 1 + k + 1 = \\ (k + 1)(k + 2)/2 + 1.$$

Há muitas variações do princípio da indução matemática, que são no fundo equivalentes, mas podem tornar algumas demonstrações mais simples.

Muitas vezes precisamos provar que uma sentença aberta $P(n)$ vale para todos os números naturais maiores ou iguais a um certo n_0 ; ou seja, que “ $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \rightarrow P(n)$ ”.

17/35

18/35

Por exemplo, a afirmação $n^2 > 3n$ é verdadeira para todo natural n maior ou igual a 4, embora não seja verdadeira se n for 0, 1, 2 ou 3.

Podemos usar o PIM para provar esse tipo de afirmação, de maneira indireta. Primeiro definimos um outro predicado $Q(m)$ como sendo equivalente a $P(n_0 + m)$. Provamos então a afirmação $(\forall m \in \mathbb{N}) Q(m)$, usando o PIM. Essa afirmação então implica $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \rightarrow P(n)$.

Este raciocínio nos permite provar tais afirmações por indução matemática de maneira mais direta, usando n_0 como base em vez de 0:

Teorema: Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n_0 um número natural qualquer. Se

- 1 $P(n_0)$ é verdadeira, e
- 2 Para todo $k \geq n_0$, $(P(k) \rightarrow P(k + 1))$,
então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$.

19/35

20/35

Exemplo

Prove que $n^2 > 3n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$.

Prova:

- **Base:** $n = 4$ é verdade pois $16 > 12$.
- **Hipótese de indução:** suponhamos que para algum $k \geq 4$, $k^2 > 3k$.

- **Passo da indução:** provar que $(k + 1)^2 > 3(k + 1)$. Temos que

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Por hipótese de indução $k^2 > 3k$, então

$$k^2 + 2k + 1 > 3k + 2k + 1.$$

Como $k \geq 4$ temos que $2k + 1 > 3$, logo

$$3k + 2k + 1 \geq 3k + 3 = 3(k + 1)$$

portanto, destas duas desigualdades,

$$(k + 1)^2 > 3(k + 1). \text{ Fim.}$$

21 / 35

22 / 35

Passo genérico constante

Numa prova por indução, além de começar com uma base n_0 arbitrária, é possível usar um incremento maior que 1 no passo da indução. Ou seja, o passo da indução pode ser a demonstração de que $P(k) \rightarrow P(k + p)$, em vez de $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Teorema: Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n_0 um número natural qualquer, e p um inteiro positivo. Se

- 1 $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(n_0 + p - 1)$ são verdadeiros, e
 - 2 Para todo k tal que $k \geq n_0$, $P(k) \rightarrow P(k + p)$.
- então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq n_0$.

23 / 35

24 / 35

Exemplo

Prove que qualquer valor postal inteiro $n \geq 8$ pode ser obtido utilizando apenas selos com valores 3 e 5. Podemos provar esta afirmação usando o teorema da indução geral com incremento $p = 3$:

- **Bases:** $n = 8, n = 9, n = 10$. Como $8 = 5 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$ e $10 = 5 + 5$ temos que a proposição é válida para as bases.
- **Hipótese de indução:** Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira para algum valor $k \geq 8$.
- **Passo:** Vamos provar que a proposição é válida para $k + 3$. Podemos obter o valor $k + 3$ acrescentando um selo de valor 3 aos selos usados para obter k .

25 / 35

26 / 35

Troca de variável na hipótese

Na hipótese de indução, podemos fazer uma troca de variável, usando k no lugar de $k + 1$. Nesse caso, o roteiro da demonstração fica assim:

- **Base da Indução:** Provar que $P(0)$ é verdade.
- **Hipótese de Indução:** Supor que para algum inteiro **positivo** k , $P(k - 1)$ é verdade.
- **Passo da Indução:** Provar que $P(k)$ é verdade.

27 / 35

Usos indevidos da indução matemática

É importante entender e verificar as condições em que a indução matemática se aplica. Se mal utilizada, ela pode levar a conclusões absurdas. Nos exemplos a seguir, tente encontrar o erro na demonstração.

28 / 35

Todos os cavalos têm a mesma cor.

Seja a sentença aberta $P(n)$: “Num conjunto com n cavalos, todos os cavalos têm a mesma cor.”

Prova: Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$, por indução.

- **Base:** Para $n = 1$ a sentença $P(n)$ é verdadeira.
- **Hipótese de indução:** Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 1$; isto é, em todo conjunto com k cavalos, todos têm a mesma cor.

29 / 35

- **Passo de indução:** Vamos provar que, em todo conjunto com $k + 1$ cavalos, todos têm a mesma cor. Considere um conjunto $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1}\}$ com $k + 1$ cavalos. Podemos escrever o conjunto C como união de dois conjuntos, cada um com k cavalos, da seguinte forma:

$$C = C' \cup C'' = \{c_1, \dots, c_k\} \cup \{c_2, \dots, c_{k+1}\}$$

30 / 35

Paradoxo dos cavalos

$$C = C' \cup C'' = \{c_1, \dots, c_k\} \cup \{c_2, \dots, c_{k+1}\}$$

Pela hipótese de indução, todos os cavalos de C' têm a mesma cor. O mesmo é verdade para C'' . Como c_2 pertence a C' e a C'' , concluímos que os cavalos de C' têm a mesma cor que os cavalos de C'' . **Logo todos os cavalos de C têm a mesma cor. Absurdo!**

31 / 35

Este exemplo, conhecido como **paradoxo dos cavalos**, foi inventado pelo matemático húngaro George Pólya (1887-1995). O exemplo a seguir ilustra um erro similar na aplicação do PIM, com “conclusão” igualmente absurda:

32 / 35

Todos os números naturais são iguais.

Prova: Seja $P(n)$ a sentença aberta “todos os números naturais menores ou iguais a n são iguais.” Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, por indução.

- **Base:** $P(0)$ é obviamente verdadeira.
- **Hipótese de indução:** Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 0$, ou seja, todos os números menores ou iguais a k são iguais.

- **Passo de indução:** Vamos provar que $P(k + 1)$ é verdadeira. Pela hipótese de indução, $k - 1 = k$. Somando 1 em ambos os lados da igualdade temos $k = k + 1$. **Portanto $P(k + 1)$ também é verdadeira. Absurdo!**

Exercícios:

- Seja C um conjunto com $n \geq 2$ elementos. Prove que C tem $n(n - 1)/2$ subconjuntos com exatamente dois elementos.
- Prove que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9.