Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Exemplo: [Descobrindo a Moeda Falsa] Num conjunto de 2^n moedas de ouro temos uma que é falsa, ou seja pesa menos que as outras. Prove, por indução, que é possível achar a moeda falsa com n pesagens usando uma balança de dois pratos sem usar peso.

Prova:

- **Base**: Para $n = 1$ temos duas moedas e, portanto, basta colocar uma em cada prato para descobrir a falsa.
- **Hipótese de indução**: Usando k pesagens podemos descobrir a moeda falsa dentre 2^k moedas.

- **Passo**: Provar que, num conjunto de 2^{k+1} moedas, podemos descobrir a moeda falsa com $k+1$ pesagens. Divida o conjunto de 2^{k+1} moedas em dois conjuntos de 2^k moedas. Coloca-se esses conjuntos em cada prato da balança. Dessa forma descobrimos em qual conjunto de 2^k moedas se encontra a falsa. Pela hipótese de indução descobre-se a moeda com k pesagens, e, mais a pesagem anterior temos um total de $k+1$ pesagens. **Fim**

Princípio das casas de pombos

O matemático alemão Johann Dirichlet (1805-1859) enunciou em 1834 o seguinte fato, conhecido como **princípio dos escaninhos** (ou **das gavetas**, **das casas de pombos** etc.):

Teorema: Se em n caixas ($n \geq 1$) colocarmos mais de n objetos, então alguma caixa conterá mais de um objeto.

Prova:

- **Base**: Para $n = 1$ o resultado é trivial pois, se há mais de um objeto, essa caixa terá mais de um objeto.
- **Hipótese de indução**: Suponhamos que o resultado é válido para algum número $k \geq 1$ de caixas, contendo mais do que k objetos.

- **Passo**: Queremos provar que o resultado é válido para $k+1$ caixas contendo mais do que $k+1$ objetos. Seja $m > k+1$ o número de objetos. Escolha uma caixa ao acaso. Se essa caixa contiver mais de um objeto, a proposição está provada. Se nessa caixa não há nenhum objeto, nas k caixas restantes estão acomodados $m > k+1 > k$ objetos; pela hipótese de indução, uma delas deve conter mais de um objeto. ...

... Finalmente, se na caixa escolhida há apenas um objeto, temos que, nas k caixas restantes estão distribuídos $m - 1 > (k+1) - 1 = k$ objetos, o que, novamente pela hipótese de indução, implica que uma das caixas contém mais de um objeto.**Fim**

Princípio da Indução Completa

Vamos agora enunciar o **princípio da indução completa** (PIC), também chamado de **princípio da indução forte**. Esta versão alternativa do princípio da indução matemática serve, como a anterior, para demonstrar sentenças na forma "$(\forall n \in \mathbb{N})\, P(n)$". Em alguns casos essa técnica torna a demonstração da sentença mais fácil que a técnica anterior.

1. **Base da indução**: Provar que $P(0)$ é verdade.
2. **Hipótese de indução**: Supor que, para algum $k \in \mathbb{N}$, $P(0)$, $P(1), \ldots P(k)$ são verdadeiros.
3. **Passo da indução**: Provar que $P(k+1)$ é verdade.

Definimos que um número inteiro p é **primo** quando ele é maior que 1 e seus únicos divisores são 1 e p. Vamos provar que todo inteiro maior ou igual a 2 é primo ou é um produto de primos.

Prova: Seja $P(n)$ a sentença aberta "n é primo ou é um produto de primos." Vamos provar que $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq 2 \rightarrow P(n)$, por indução completa.

- **Base**: $P(2)$ é verdade pois 2 é primo.
- **Hipótese de indução**: Suponha que, para algum $k \geq 2$, $P(i)$ é verdade para todo $i \in \mathbb{N}$ com $2 \leq i \leq k$.

- **Passo da indução**: Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdade. Se $k+1$ é primo então $P(k+1)$ é verdadeiro. Se $k+1$ não é primo, como $k+1 \geq 2$, ele deve ter algum divisor diferente de 1 e de $k+1$. Ou seja, $k+1 = ab$ para algum a e b, com $1 < a \leq k$. Como $a > 1$, concluímos que $b < k+1$; como $a < k+1$, concluímos que $b > 1$. Ou seja, $2 \leq a \leq k$ e $2 \leq b \leq k$. Pela hipótese de indução, portanto, a e b são primos ou produtos de primos. Portanto $k+1 = a \cdot b$ também é um produto de primos. **Fim.**

Os **números de Lucas** $A_1, A_2, \ldots$ são definidos pelas seguintes regras: $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, e $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ para todo número inteiro n maior ou igual a 3.
Vamos provar $A_n < (\frac{7}{4})^n$ para todo inteiro $n \geq 1$, por indução completa.

Prova:
Seja $P(n)$ a sentença aberta "$A_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$."

- **Base**:
  - $P(1)$ é verdade pois $A_1 = 1 < \frac{7}{4}$.
  - $P(2)$ é verdade pois $A_2 = 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$.
- **Hipótese de indução**: Suponha que, para algum inteiro $k \geq 2$, $P(i)$ é verdade para todo $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq k$.

- **Passo da indução**: Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdade, ou seja $A_{k+1} < (\frac{7}{4})^{k+1}$. Como $k+1 \geq 3$, pela definição temos que $A_{k+1} = A_k + A_{k-1}$. Então, pela hipótese de indução, temos

$$A_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}+1\right)\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \frac{11}{4}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

Como $\frac{11}{4} < 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ temos que,

$$A_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^2\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

.

Exercícios:

- Prove que todo inteiro maior ou igual a 5, par ou ímpar, é a soma de números primos ímpares (isto é, primos diferentes de 2). Por exemplo, $6 = 3+3$, $7 = 7$, e $10 = 3+7$.
- Seja x um número real diferente de zero, tal que $x + \frac{1}{x}$ é um número inteiro. Prove que, para todo número natural n, $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro.

Princípio da Boa Ordenação

Uma outra maneira de provar sentenças abertas sobre número naturais é usar uma propriedade dos números naturais conhecida como o **princípio da boa ordenação** (PBO).
Seja S um conjunto de números reais. Um **elemento mínimo** de S é um $y \in S$ tal que para todo $x \in S, y \leq x$. O princípio da boa ordenação diz que

Teorema: Todo subconjunto não vazio S de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo.

Note que esta afirmação não é válida para subconjuntos de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$; isto é, existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{Z}$ que não tem elemento mínimo.

Como exemplo de uso do PBO, vamos provar o **Teorema da Divisão de Euclides**:

Teorema: Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$. Então existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$.

Prova:
Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$, e seja

$$S = \{\, a - bk : k \in \mathbb{N}, a - bk \geq 0 \,\}.$$

Observe que $S \subseteq \mathbb{N}$ pois $a - bk \geq 0$; e que $S \neq \emptyset$ pois contem $a = a - b0$. Então pelo PBO, o conjunto S tem um elemento mínimo. Seja $r = a - bq$ esse elemento. ...

$r = a - bq$
Suponha agora que $r \geq b$. Nesse caso $a - b(q + 1) = r - b \geq 0$, e portanto $r - b$ está também em S. Como $b > 0$, temos $r - b < r$. Isto contraria a escolha de r como o menor elemento de S. Portanto $r < b$.

Formas equivalentes do princípio da indução

O princípio da indução matemática, o princípio da indução completa e o princípio da boa ordenação (PBO) são equivalentes. Mais precisamente, podemos provar que
PIM $\rightarrow$ **PBO** $\rightarrow$ **PIC** $\rightarrow$ **PIM**.
Exercício.

Exercício: Considere o seguinte jogo para duas pessoas. Coloca-se um número qualquer $n \geq 1$ de botões na mesa, e cada jogador, alternadamente, retira no mínimo 1 e no máximo 4 botões da pilha. Quem tira o último botão perde.

Vamos definir f_n como sendo 1 se o jogador da vez consegue ganhar quando há n botões na mesa, se jogar corretamente; e 0 se ele vai sempre perder, não importa como jogue. Por exemplo, f_1 é zero, por definição; mas f_5 é 1 pois o jogador da vez consegue ganhar (tirando 4 botões).

a) Determine f_n para n entre 1 e 30.
b) Determine uma fórmula eficiente para f_n e prove-a por indução.