

Matemática Discreta

Pedro Hokama

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matemática Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

1/38

2/38

Relações

Relações

Uma **relação binária** (ou simplesmente uma **relação**) \mathcal{R} de um conjunto A para um conjunto B é um sub-conjunto de $A \times B$. Em outras palavras, é um conjunto de pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

Em geral usa-se a notação $a\mathcal{R}b$ para dizer que $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $a\not\mathcal{R}b$ para dizer que $(a, b) \notin \mathcal{R}$. Se $(a, b) \in \mathcal{R}$ dizemos que a **está relacionado com** b pela relação \mathcal{R} .

3/38

4/38

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$. Então $\mathcal{R} = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5), (3, 6)\}$ é uma relação de A para B . Neste exemplo, temos $2\mathcal{R}5$ e $3\mathcal{R}5$, mas $2\mathcal{R}4$ e $5\mathcal{R}2$.

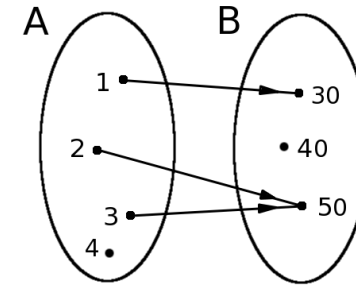


Diagrama da relação $\mathcal{R} = \{(1, 30), (2, 50), (3, 50)\}$ do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ para o conjunto $B = \{30, 40, 50\}$.

Domínio

- O conjunto de pares $\{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{N}\}$ é um exemplo de uma relação de \mathbb{N} para \mathbb{R} .
- Se R é uma relação de A para A , dizemos que \mathcal{R} é uma relação **em** A ou **sobre** A .
- Observe que os sinais de comparação da álgebra (" $<$ ", " \leq ", etc.) são relações binárias definidas sobre os números reais.
- Observe também que " \in " é uma relação binária entre o conjunto \mathcal{U} de todos os elementos, e o conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ de todos os conjuntos; e que " \subseteq " é uma relação binária definida sobre o conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{U})$.

O **domínio** de uma relação \mathcal{R} , denotado por $\text{Dom}(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados que estão em \mathcal{R} . Isto é:

$$\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{ a : (\exists b) (a, b) \in \mathcal{R} \}$$

Imagem

A **imagem** ou **contra-domínio** de uma relação \mathcal{R} , denotado por $\text{Img}(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados que estão em \mathcal{R} . Isto é:

$$\text{Img}(\mathcal{R}) = \{ b : (\exists a) (a, b) \in \mathcal{R} \}$$

Observe que um conjunto de pares ordenados \mathcal{R} é uma relação de A para B se, e somente se, $\text{Dom}(\mathcal{R}) \subseteq A$ e $\text{Img}(\mathcal{R}) \subseteq B$.

Exemplo: Seja \mathcal{R} a relação $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5), (3, 6)\}$. Temos que $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3\}$ e $\text{Img}(\mathcal{R}) = \{4, 5, 6\}$.

Exemplo: Seja \mathcal{R} a relação $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$. Observe que $\text{Dom}(\mathcal{R})$ é o conjunto de todos os inteiros \mathbb{Z} , mas $\text{Img}(\mathcal{R})$ é o conjunto dos quadrados perfeitos $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$.

9/38

10/38

Restrição de relações

Exemplo: Seja A o conjunto dos presidentes do Brasil, de 1889 a 2010. Seja \mathcal{R} a relação sobre A tal que $a\mathcal{R}b$ se e somente se o presidente b foi o sucessor de a . Assim, por exemplo, temos que 'Figueiredo' \mathcal{R} 'Tancredo' e 'Fernando Henrique' \mathcal{R} 'Lula', mas 'Lula' $\not\mathcal{R}$ 'Fernando Henrique'. Observe que o domínio desta relação são todos os presidentes menos Lula (que terminou o mandato em 2010), e a imagem são todos os presidentes menos Deodoro da Fonseca.

- Seja \mathcal{R} uma relação, e sejam A' e B' conjuntos quaisquer. A **restrição de \mathcal{R} a A' e B'** é o conjunto de pares de $(a, b) \in \mathcal{R}$ tais que $a \in A'$ e $b \in B'$; ou seja, $\mathcal{R} \cap A' \times B'$.
- A **restrição de \mathcal{R} a A'** é geralmente entendida como $\mathcal{R} \cap A' \times A'$.

11/38

12/38

Relações de identidade

Exemplo: Seja \mathcal{R} a relação dos inteiros positivos $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ para os inteiros, tal que $x\mathcal{R}y$ se e somente se x é divisor de y . A restrição de \mathcal{R} aos conjuntos $U = \{0, 2, 3, 5, 6\}$ e $V = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ é o conjunto de pares

$$\{(2, 0), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 0), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (5, 0), (5, 5), (6, 0), (6, 6)\}$$

A restrição de \mathcal{R} ao conjunto U é

$$\{(2, 0), (2, 2), (2, 6), (3, 0), (3, 3), (3, 6), (5, 0), (5, 5), (6, 0), (6, 6)\}$$

Para qualquer conjunto A , a relação **identidade sobre A** , denotada por \mathcal{I}_A , é definida por

$$\mathcal{I}_A = \{(x, x) : x \in A\}$$

Esta relação nada mais é que a relação de igualdade “=”, restrita ao conjunto A .

Exemplo: Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $\mathcal{I}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

13/38

14/38

Relação inversa

- Seja \mathcal{R} uma relação do conjunto A para o conjunto B .
- A **relação inversa** denotada por \mathcal{R}^{-1} , é a relação do conjunto B para o conjunto A definida da seguinte forma:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{R}\}$$

- Ou seja, \mathcal{R}^{-1} é a relação tal que $a\mathcal{R}^{-1}b$ se e somente se $b\mathcal{R}a$, para quaisquer a e b .
- Note que $\text{Dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \text{Img}(\mathcal{R})$ e $\text{Img}(\mathcal{R}^{-1}) = \text{Dom}(\mathcal{R})$.

15/38

Imagem e imagem inversa de conjuntos sob uma relação

Sejam \mathcal{R} uma relação de um conjunto A para um conjunto B , e X um conjunto qualquer.

A **imagem de X** sob \mathcal{R} é o conjunto

$$\{b : (\exists a \in X) (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

A **imagem inversa** de X sob \mathcal{R} é o conjunto

$$\{a : (\exists b \in X) (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

16/38

A **imagem de X** sob \mathcal{R} é o conjunto

$$\{ b : (\exists a \in X) (a, b) \in \mathcal{R} \}$$

A **imagem inversa** de X sob \mathcal{R} é o conjunto

$$\{ a : (\exists b \in X) (a, b) \in \mathcal{R} \}$$

Observe que a imagem inversa de X sob \mathcal{R} é a imagem de X sob a relação inversa \mathcal{R}^{-1} . A imagem de X sob \mathcal{R} costuma ser indicada por $\mathcal{R}(X)$. A imagem inversa então pode ser indicada por $\mathcal{R}^{-1}(X)$.

Sejam \mathcal{R} e \mathcal{S} duas relações. A **composição de \mathcal{R} com \mathcal{S}** é a relação denotada por $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, e definida da seguinte forma:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{ (a, c) : (\exists b) (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{S} \}$$

17/38

18/38

Exemplo: Considere as relações

$$\mathcal{R} = \{ (1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4) \}$$

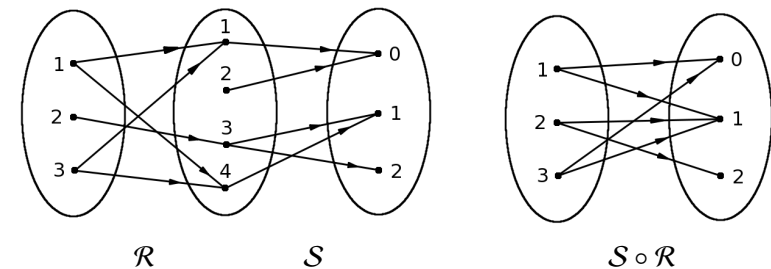
$$\mathcal{S} = \{ (1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1) \}$$

A composição delas é

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{ (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1) \}$$

Observe que

- $(1, 0) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(1, 1) \in \mathcal{R}$ e $(1, 0) \in \mathcal{S}$,
- $(1, 1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(1, 4) \in \mathcal{R}$ e $(4, 1) \in \mathcal{S}$,
- $(2, 1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(2, 3) \in \mathcal{R}$ e $(3, 1) \in \mathcal{S}$,
- $(2, 2) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(2, 3) \in \mathcal{R}$ e $(3, 2) \in \mathcal{S}$,
- $(3, 0) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(3, 1) \in \mathcal{R}$ e $(1, 0) \in \mathcal{S}$,
- $(3, 1) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ porque $(3, 4) \in \mathcal{R}$ e $(4, 1) \in \mathcal{S}$.



19/38

20/38

Exemplo:

- Seja \mathcal{R} a relação de \mathbb{Z} para \mathbb{Z} definida por $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x = y + 1$.
- Seja \mathcal{S} a relação de \mathbb{Z} para \mathbb{Z} definida por $y\mathcal{S}z \leftrightarrow y = 2z$.
- A composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ é a relação de \mathbb{Z} para \mathbb{Z} definida por

$$x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{Z}) x = y + 1 \wedge y = 2z$$

- Ou seja, $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \leftrightarrow x = 2z + 1$.
- Observe que $(5, 2) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, porque $(5, 4) \in \mathcal{R}$ e $(4, 2) \in \mathcal{S}$.
- Observe também que $(6, 2) \notin \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, porque o único elemento relacionado com 6 por \mathcal{R} é 5, mas $(5, 2) \notin \mathcal{S}$.
- e $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})$?

21 / 38

- Sejam \mathcal{R} e \mathcal{S} as mesmas relações.
 - Seja \mathcal{R} a relação de \mathbb{Z} para \mathbb{Z} definida por $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x = y + 1$.
 - Seja \mathcal{S} a relação de \mathbb{Z} para \mathbb{Z} definida por $y\mathcal{S}z \leftrightarrow y = 2z$.
- A composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é a relação de \mathbb{Z} para \mathbb{Z} definida por

$$x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})z \leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{Z}) x = 2y \wedge y = z + 1$$

- Ou seja, $x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})z \leftrightarrow x = 2z + 2$.
- Observe que $(5, 2) \notin \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, mas $(6, 2) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.
- Podemos observar então que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \neq \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, ou seja, a composição de relações não é comutativa.

22 / 38

- Observe que, para quaisquer relações \mathcal{R} e \mathcal{S} , temos

$$\text{Dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \text{Dom}(\mathcal{R})$$

- e

$$\text{Img}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \text{Img}(\mathcal{S})$$

Exercício: Seja \mathcal{R} o conjunto de todos os pares (x, x^2) onde x é um número inteiro. Seja \mathcal{S} o conjunto de todos os pares $(3y, y)$ onde y é um número natural. Descreva as relações $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

23 / 38

24 / 38

Notação alternativa

- A notação $S \circ \mathcal{R}$ para composição de \mathcal{R} com S é muito comum, especialmente para funções.
- Em algumas áreas da matemática, entretanto, a composição de uma relação \mathcal{R} com uma relação S é denotada pela justaposição $\mathcal{R}S$.
- Observe que, nesta notação, a ordem das relações é oposta à da notação tradicional.

25/38

Composição com identidade

Observe que, para qualquer relação \mathcal{R} de um conjunto A para um conjunto B , as composições $I_B \circ \mathcal{R}$ e $\mathcal{R} \circ I_A$ são sempre a própria relação \mathcal{R} .

26/38

Composição com a relação inversa

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, uma relação sobre A . Lembramos que a relação inversa \mathcal{R}^{-1} é $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, e que $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Então:

- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$.
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}$.
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1, 3)\}$.
- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(3, 1)\}$.

Observamos que neste exemplo $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ é diferente de $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$, e ambas são diferentes da identidade I_A .

27/38

Inversa da composição

Pode-se verificar que, para quaisquer relações \mathcal{R} e S ,

$$(S \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ S^{-1}$$

Ou seja, a **inversa da composição é a composição das inversas, na ordem inversa**.

28/38

Exemplo:

- Sejam as relações

$$\mathcal{R} = \{(1, 20), (1, 30), (2, 40), (3, 20)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(20, 200), (20, 300), (40, 200)\}$$

- Observe que

- $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 200), (1, 300), (2, 200), (3, 200), (3, 300)\}$.
- $\mathcal{R}^{-1} = \{(20, 1), (30, 1), (40, 2), (20, 3)\}$.
- $\mathcal{S}^{-1} = \{(200, 20), (300, 20), (200, 40)\}$.
- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} = \{(200, 1), (300, 1), (200, 3), (200, 2), (300, 3)\}$.
- $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \{(200, 1), (300, 1), (200, 3), (300, 3), (200, 2)\}$.

Para quaisquer relações $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, se $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ e $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$, então $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{S}_2$.

29 / 38

30 / 38

Potências de uma relação

Seja \mathcal{R} uma relação. A **potência** \mathcal{R}^n , $n = 1, 2, \dots$ é definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^1 &= \mathcal{R} \\ \mathcal{R}^{n+1} &= \mathcal{R}^n \circ \mathcal{R} \end{aligned}$$

Teorema: Para quaisquer relações \mathcal{R} e \mathcal{S} , e qualquer inteiro $n \geq 1$, se $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ então $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{S}^n$.

31 / 38

Tipos de relações

Seja \mathcal{R} uma relação sobre um conjunto A .

- \mathcal{R} é **reflexiva** sobre A se, e somente se, para todo $a \in A$ o par (a, a) está em \mathcal{R} .
- \mathcal{R} é **irreflexiva** se, e somente se, ela não possui nenhum par da forma (a, a) .
- \mathcal{R} é **simétrica** se, e somente se, $(\forall a, b \in A) a\mathcal{R}b \rightarrow b\mathcal{R}a$. Ou seja, se um par (a, b) está em \mathcal{R} então o par (b, a) também está em \mathcal{R} .

32 / 38

- \mathcal{R} é **anti-simétrica** se, e somente se,
 $(\forall a, b \in A) (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \rightarrow a = b$. Ou seja, para quaisquer elementos distintos a e b em A , no máximo um dos pares (a, b) e (b, a) está em \mathcal{R} .
- \mathcal{R} é **transitiva** se, e somente se,
 $(\forall a, b, c \in A) (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \rightarrow a\mathcal{R}c$. Ou seja, se dois pares (a, b) e (b, c) estão em \mathcal{R} então o par (a, c) também está em \mathcal{R} .

33/38

- Observe também que os termos simétrica e anti-simétrica não são opostos: qualquer relação de identidade, por exemplo, é ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica.
- Além disso, há relações que não são nem simétricas nem anti-simétricas. Por exemplo, a relação $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1)\}$ sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ não é simétrica, pois ela tem o par $(3, 1)$ mas não tem o par $(1, 3)$; e nem anti-simétrica, pois ela tem os dois pares $(2, 1)$ e $(1, 2)$.

35/38

- Note que dizer que \mathcal{R} é reflexiva sobre A equivale a dizer que $\mathcal{I}_A \subseteq \mathcal{R}$;
- dizer que \mathcal{R} é irreflexiva equivale a dizer que $\mathcal{R} \cap \mathcal{I}_A = \emptyset$.
- Observe que há relações que não são nem reflexivas e nem irreflexivas, como por exemplo a relação $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1)\}$ sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.
- Porém, se o conjunto A não é vazio, uma relação não pode ser ao mesmo tempo reflexiva sobre A e irreflexiva.

34/38

- Finalmente, observe que uma relação pode satisfazer qualquer uma das propriedades por vacuidade, se não existirem elementos em A que satisfaçam as condições no lado esquerdo do conectivo ' \rightarrow '.
- Por exemplo, a relação $\mathcal{R}_3 = \{(1, 2)\}$ é transitiva, porque não existem a, b e c tais que $(a\mathcal{R}_3b) \wedge (b\mathcal{R}_3c)$.

36/38

$$\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \\ (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}.$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}.$$

$$\mathcal{R}_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \\ (3, 3), (4, 1), (1, 4), (4, 4)\}.$$

$$\mathcal{R}_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$$

$$\mathcal{R}_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), \\ (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}.$$

$$\mathcal{R}_6 = \{(3, 4)\}.$$

- São reflexivas sobre A : $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3$ e \mathcal{R}_5 .
- São irreflexivas sobre A : \mathcal{R}_4 e \mathcal{R}_6 .
- São simétricas: \mathcal{R}_2 e \mathcal{R}_3 .
- São anti-simétricas: $\mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5$ e \mathcal{R}_6 .
- São transitivas: $\mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5$ e \mathcal{R}_6 .