

## Matemática Discreta

Pedro Hokama

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matemática Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

1/36

2/36

## Relações de ordem

## Relações de ordem e equivalência

**Definição:** Uma relação  $\mathcal{R}$  sobre um conjunto  $A$  é uma **relação de ordem** se ela é reflexiva sobre  $A$ , anti-simétrica e transitiva.

**Exemplo:** Sejam  $A = \mathbb{R}$  e  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x \leq y\}$ .

- $\mathcal{R}$  é reflexiva sobre  $A$  pois  $(\forall x \in \mathbb{R}) x \leq x$  logo  $(\forall x \in \mathbb{R}) x \mathcal{R} x$ .

3/36

4/36

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x \leq y\}.$$

- $\mathcal{R}$  é transitiva pois  $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$ .

Portanto

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \rightarrow x\mathcal{R}z.$$

- $\mathcal{R}$  é anti-simétrica pois  $(\forall x, y \in \mathbb{R}) (x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y$ .

Portanto

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \rightarrow x = y.$$

Se  $\mathcal{R}$  é uma relação de ordem sobre um conjunto  $A$ , o par  $(A, \mathcal{R})$  é chamado um **conjunto ordenado**. Por exemplo,  $(\mathbb{N}, \leq)$  é um conjunto ordenado (entendendo-se que ' $\leq$ ' aqui é a restrição da relação "menor ou igual" aos números naturais). Outro exemplo de conjunto ordenado é  $(\mathbb{P}(A), \subseteq)$ , para qualquer conjunto  $A$ .

## Relações de ordem estrita

**Definição:** Uma relação  $\mathcal{R}$  sobre um conjunto  $A$  é uma **relação de ordem estrita** se ela é irreflexiva sobre  $A$ , anti-simétrica e transitiva.

**Exemplo:** Sejam  $A = \mathbb{R}$  e  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x < y\}$ .

- $\mathcal{R}$  é irreflexiva sobre  $A$  pois  $(\forall x \in \mathbb{R}) \neg(x < x)$  logo  $(\forall x \in \mathbb{R}) x \not\mathcal{R}x$ .

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, : x < y\}.$$

- $\mathcal{R}$  é transitiva pois  $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ .

Portanto

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \rightarrow x\mathcal{R}z.$$

- $\mathcal{R}$  é anti-simétrica, pois  $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \neg((x < y \wedge y < x))$ . Portanto, por vacuidade,

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \rightarrow x = y.$$

- Note que uma relação de ordem estrita não é um tipo particular de relação de ordem.
- Porém, toda relação de ordem estrita  $\mathcal{R}$  pode ser obtida de uma relação de ordem  $\mathcal{S}$  excluindo-se todos os pares da forma  $(a, a)$ .
- Reciprocamente, toda relação de ordem  $\mathcal{S}$  sobre um conjunto  $A$  é a união  $\mathcal{R} \cup \mathcal{I}_A$  onde  $\mathcal{R}$  é uma relação de ordem estrita sobre  $A$ .

9/36

- Seja  $\mathcal{R}$  relação de ordem estrita e  $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \mathcal{I}_A$
- Note que, para quaisquer  $a, b \in A$

$$a\mathcal{R}b \leftrightarrow (a\mathcal{S}b \wedge a \neq b)$$

$$a\mathcal{S}b \leftrightarrow (a\mathcal{R}b \vee a = b)$$

- Dizemos que  $\mathcal{R}$  é a **ordem estrita associada à ordem  $\mathcal{S}$** , e vice-versa.

10/36

## Ordem total

**Definição:** Uma relação  $\mathcal{R}$  é uma **ordem total** sobre um conjunto  $A$  (ou **ordem linear**) se, e somente se  $\mathcal{R}$  é uma relação de ordem sobre  $A$  e quaisquer dois elementos de  $A$  são comparáveis por  $\mathcal{R}$ .

Portanto uma relação de ordem  $\mathcal{R}$  é total se, quaisquer que sejam  $a$  e  $b$  em  $A$ ,  $(a, b) \in \mathcal{R}$  ou  $(b, a) \in \mathcal{R}$ . Se  $\mathcal{R}$  é uma relação de ordem total sobre  $A$ , o par  $(A, \mathcal{R})$  é chamado de **conjunto totalmente ordenado**.

11/36

**Exemplo:** A relação  $\leq$  é uma ordem total sobre  $\mathbb{R}$ , pois  $(\forall a, b \in \mathbb{R}) a \leq b \vee b \leq a$ .

A relação  $\subseteq$  não é uma ordem total quando  $A$  tem pelo menos dois elementos, pois nesse caso existem subconjuntos distintos  $X$  e  $Y$  em  $\mathbb{P}(A)$

12/36

## Ordem lexicográfica

- Uma ordem muito importante no dia a dia, e em computação, é a **ordem alfabética** definida sobre palavras, nomes, etc.. Por exemplo, nesta ordem “hoje” vem antes de “ontem”, “biscoito” vem antes de “bolacha”, “porco” vem antes de porta”, e “sol” vem antes de “soldado”.

13/36

- Se persistir o empate, consideram-se as terceiras letras, as quartas letras, e assim por diante — até haver um desempate (letras diferentes na mesma posição das duas palavras), ou uma das palavras terminar. Neste último caso (como no exemplo de “sol” e “soldado”), convencionam-se que a palavra que termina primeiro vem antes da outra.

15/36

- Observe que esta ordem é baseada na ordem tradicional das letras do alfabeto: a, b, c, . . . , z.
- Compara-se a primeira letra de uma com a primeira letra da outra. Se forem diferentes, a ordem das palavras é a mesma das letras.
- Se as palavras começam com a mesma letra, compara-se a segunda letra de uma com a segunda da outra.

14/36

- Relação  $\leq_2$  definida sobre os pares  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , pela fórmula

$$(a_1, a_2) \leq_2 (b_1, b_2) \leftrightarrow (a_1 < b_1) \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$$

16/36

## Diagrama de Hasse

Podemos representar graficamente um conjunto ordenado  $(A, \mathcal{R})$ , onde  $A$  é finito e não muito grande, por um diagrama de pontos e linhas, chamado **diagrama de Hasse** (em homenagem ao matemático alemão Helmut Hasse, 1898–1979).

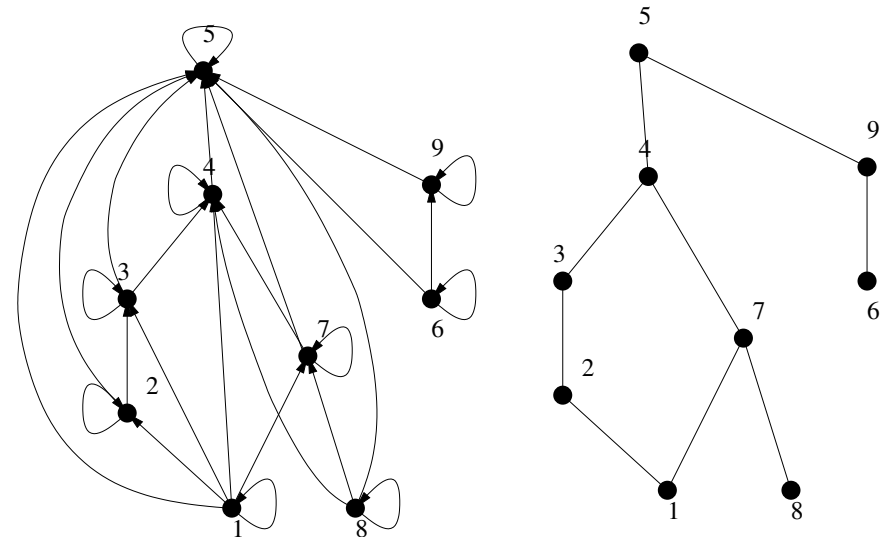
- cada elemento de  $A$  é representado por um ponto do plano, com posição arbitrária,
- exceto pela regra de que, para todo par  $(a, b) \in \mathcal{R}$  com  $a, b \in A$  e  $a \neq b$ , o ponto que representa  $a$  deve estar abaixo do ponto que representa  $b$
- Cada um desses pares é representado por uma linha reta ligando  $a$  com  $b$ , exceto que pares que podem ser deduzidos por transitividade não são desenhados.

17/36

18/36

Para ilustrar a construção, vamos usar o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , e a relação sobre  $A$ :

$$\mathcal{R} = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 7), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6), (6, 9), (6, 5), (7, 7), (7, 4), (7, 5), (8, 8), (8, 7), (8, 4), (8, 5), (9, 9), (9, 5) \}$$



19/36

20/36

## Elementos mínimos e máximos

Seja  $\mathcal{R}$  uma relação de ordem sobre um conjunto  $X$ , e  $A$  um subconjunto de  $X$ . Um **elemento mínimo de  $A$  sob  $\mathcal{R}$**  é um elemento  $m \in A$  se  $(m, a) \in \mathcal{R}$  para todo  $a \in A$ .

**Exemplo:** Considere o conjunto de conjuntos

$$A = \{ \{1, 2, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\} \}$$

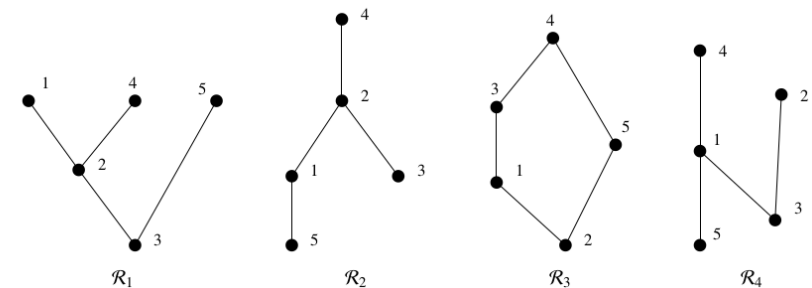
e seja  $\mathcal{R}$  a relação " $\subseteq$ " entre conjuntos. O elemento  $\{2, 4\}$  de  $A$  é mínimo sob  $\mathcal{R}$ , pois  $\{2, 4\} \subseteq b$  para todo conjunto  $b \in A$ .

Um elemento  $m$  de  $A$  é **máximo** sob uma relação  $\mathcal{R}$  se  $(a, m) \in \mathcal{R}$  para todo  $a \in A$ .

21 / 36

22 / 36

No diagrama de Hasse de  $\mathcal{R}$ , o elemento mínimo existe se há um único ponto no diagrama a partir do qual é possível alcançar qualquer outro ponto por uma sequência de linhas, todas elas percorridas no sentido de baixo para cima. O elemento máximo, se existe, pode ser identificado de maneira análoga, isto é, se a partir dele podemos alcançar qualquer outro ponto percorrendo uma sequência de linhas no sentido descendente.



Diagramas de Hasse sobre o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Na relação  $\mathcal{R}_1$ , mínimo: 3, máximo: não há. Na relação  $\mathcal{R}_2$ , mínimo: não há, máximo: 4. Na relação  $\mathcal{R}_3$ , mínimo: 2, máximo: 4. Na relação  $\mathcal{R}_4$ , mínimo: não há, máximo: não há.

23 / 36

24 / 36

## Elementos minimais e maximais

Seja  $\mathcal{R}$  uma relação de ordem sobre um conjunto  $X$ , e  $A$  um subconjunto de  $X$ . Um **elemento minimal de  $A$  sob  $\mathcal{R}$**  é um elemento  $m \in A$  tal que não existe nenhum  $a \in A$ , diferente de  $m$ , com  $(a, m) \in \mathcal{R}$ .

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e

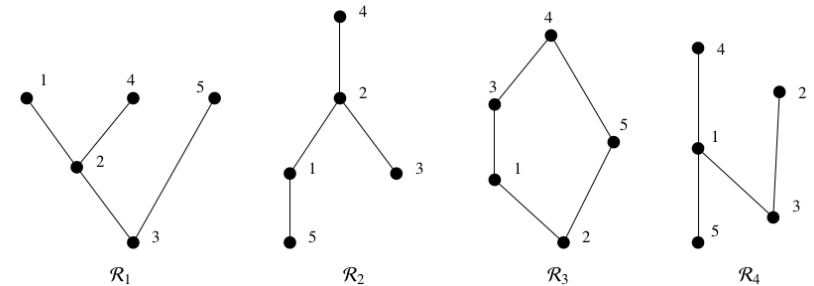
$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (4, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}.$$

O inteiro 2, por exemplo, é um elemento minimal de  $A$  sob  $\mathcal{R}$ , pois não existe nenhum par  $(a, 2)$  na relação. Os elementos minimais de  $A$  sob  $\mathcal{R}$  são 1, 2, e 5.

25/36

26/36

Um **elemento maximal de  $A$  sob  $\mathcal{R}$**  é um elemento  $m$  de  $A$  tal que não existe nenhum  $a$  em  $A$ , diferente de  $m$ , tal que  $(m, a) \in \mathcal{R}$ .



Na relação  $\mathcal{R}_1$ , minimal: 3, maximais: 1, 4 e 5. Na relação  $\mathcal{R}_2$ , minimais: 3, 5, maximal: 4. Na relação  $\mathcal{R}_3$ , minimal: 2, maximal: 4. Na relação  $\mathcal{R}_4$ , minimais: 3 e 5, maximais: 2 e 4.

27/36

28/36

Os conceitos de minimal e maximal são muito usados quando  $A$  é um conjunto de conjuntos, e  $\mathcal{R}$  é a relação ' $\subseteq$ '. Neste caso, um elemento minimal de  $A$  é um conjunto que não contém propriamente nenhum outro elemento de  $A$ . Por exemplo, seja

$$A = \{ \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4, 5\} \}$$

29 / 36

$$A = \{ \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4, 5\} \}$$

Neste conjunto, o elemento  $\{1, 2, 4\}$  não é minimal, pois ele contém propriamente o conjunto  $\{1, 2\}$  que também está em  $A$ . Por outro lado,  $\{2\}$ ,  $\{1, 3\}$ , e  $\{3, 4, 5\}$  são minimais sob a relação ' $\subseteq$ '. Analogamente o elemento  $\{2\}$  não é maximal pois  $\{2\} \subseteq \{1, 2, 4\}$ . Os elementos maximais de  $A$  sob  $\subseteq$  são  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$  e  $\{3, 4, 5\}$ .

30 / 36

## Relações de equivalência

**Definição:** Uma **relação de equivalência sobre** um conjunto  $A$  é uma relação  $\mathcal{R}$  sobre  $A$  que é reflexiva sobre  $A$ , simétrica e transitiva.

**Exemplo:** Seja  $A$  o conjunto de todas as retas do plano, e seja  $\mathcal{R}$  a relação  $X\mathcal{R}Y$  se, e somente se,  $X = Y$  ou  $X \cap Y = \emptyset$ . Esta relação é simplesmente a relação de paralelismo da geometria plana. Claramente a relação é reflexiva sobre  $A$ , simétrica e transitiva, logo é uma relação de equivalência.

31 / 36

32 / 36

## Classes de equivalência

Seja  $\mathcal{R}$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ . Para todo elemento  $a \in A$ , o conjunto

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A : x\mathcal{R}a\}$$

é denominado a **classe de equivalência** do elemento  $a$  na relação  $\mathcal{R}$ .

**Exemplo:** Vamos construir as classes de equivalência da relação  $\mathcal{R}$  de congruência módulo 5. A classe de equivalência de um inteiro  $i$  na relação  $\mathcal{R}$ , é o conjunto

$$[i]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{Z} : (\exists s \in \mathbb{Z}) x - i = 5s\}$$

Ou seja,  $x \in [i]_{\mathcal{R}}$  se e somente se  $x = 5k + i$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ ; isto é, se e somente se  $x$  tem o mesmo resto que  $i$  quando dividido por 5. Portanto existem apenas 5 classes de equivalência, que correspondem aos possíveis restos da divisão por 5:

33 / 36

34 / 36

## Relações de equivalência e partições

- $[0]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$ .
- $[1]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$ .
- $[2]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$ .
- $[3]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$ .
- $[4]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$ .

Classes de uma relação de equivalência  $\mathcal{R}$  sobre um conjunto  $A$  são duas a duas disjuntas. Como todo elemento de  $A$  está em alguma classe, a união de todas as classes é o conjunto  $A$ . Isto significa que as classes de equivalência de  $\mathcal{R}$  formam uma partição do conjunto  $A$ .

35 / 36

36 / 36