Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Funções

Conceito

Uma **relação** $\mathcal{F}$ de A para B é uma **função de** A **para** B se, e somente se, para todo $a \in A$ existe **exatamente um** $b \in B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{F}$.

- Usa-se geralmente a notação $\mathcal{F} : A \to B$.
- Para cada elemento a de A, é costume indicar por $\mathcal{F}(a)$ o **valor de** $\mathcal{F}$ **em** a,
- isto é, o único elemento b de B tal que $(a, b) \in \mathcal{F}$.
- Observe que esta notação só tem sentido para funções, e não para relações em geral.

Exemplo: A relação $\mathcal{F} = \{(1,40),(2,30),(3,30)\}$ é uma função do conjunto $X = \{1,2,3\}$ para o conjunto $Y = \{20,30,40\}$, isto é $\mathcal{F} : X \to Y$.

Exemplo: A relação $\mathcal{F} = \{(1,40),(3,30)\}$ **não** é uma função de $X = \{1,2,3\}$ para $Y = \{20,30,40\}$, pois para $a = 2 \in X$ **não** existe um $b \in Y$ tal que $(a,b) \in \mathcal{F}$.

Exemplo: A relação $\mathcal{F} = \{(1,40),(2,20),(2,30),(3,30)\}$ **não** é uma função de $X = \{1,2,3\}$ para $Y = \{20,30,40\}$, pois para $a = 2 \in X$ existem **dois** valores distintos $b' = 20 \in Y$ e $b'' = 30 \in Y$ tais que $(a,b') \in \mathcal{F}$ e $(a,b'') \in \mathcal{F}$.

Exemplo: A relação $\mathcal{F} = \left\{(x,x^2) : x \in \mathbb{Z}\right\}$ é uma função do conjunto $\mathbb{Z}$ para o conjunto $\mathbb{N}$, isto é $\mathcal{F} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Exemplo: A relação $\mathcal{F} = \left\{(x^2,x) : x \in \mathbb{Z}\right\}$ **não** é uma função do conjunto $\mathbb{N}$ para o conjunto $\mathbb{Z}$, pois há elementos $a \in \mathbb{N}$ (como $a = 5$) para os quais não existe par $(a,b) \in \mathcal{F}$, e há elementos $a \in \mathbb{N}$ (como $a = 4$) para os quais existem dois pares $(a,b) \in \mathcal{F}$ (no caso, $(4,2)$ e $(4,-2)$).

Em geral, usaremos letras minúsculas, como f, g, etc., para relações que são funções.

Domínio e imagem de uma função

- Todos os conceitos introduzidos para relações (como domínio, composição, inversa, etc.) valem também para funções.

- Se f é uma função de A para B, então, de acordo com a definição, o domínio $\mathrm{Dom}(f)$ de f é sempre o conjunto A.
- A imagem ou contra-domínio $\mathrm{Img}(f)$ de f é o conjunto

$$Img(f) = \{f(a) : a \in A\} = \{b \in B : (\exists a \in A)\, b = f(a)\}$$

Observe que a imagem está contida no conjunto B, mas nem sempre é igual a B.

Exercício: Seja f uma função e $\mathcal{R}$ uma relaçao sobre $\mathrm{Dom}(f)$ tal que para todo x e y $x\mathcal{R}y \leftrightarrow f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$.

- Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.
- Encontre as classes de equivalência de $\mathcal{R}$.

Inversa de função

A inversa de uma função f é a relação

$$f^{-1} = \{\,(y, x) : (x, y) \in f\,\}$$

Note que a inversa de uma função nem sempre é uma função.

Exemplo: Seja f a função de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Sua inversa é a relação

$$f^{-1} = \left\{ (x^2, x) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

que associa a cada número real $y \geq 0$ suas duas raízes quadradas $-\sqrt{y}$ e $+\sqrt{y}$.

Composição de funções

A composição de duas funções f e g é definida da mesma forma que para relações,

$$g \circ f = \{ (a, c) : (\exists b)\, (a, b) \in f \wedge (b, c) \in g \}$$

Em particular, se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então verifica-se que $g \circ f$ é uma função de A para C, e para todo $a \in A$ o valor de $g \circ f$ em a é definido pela fórmula:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Por exemplo
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 2x + 3$,
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = 3x + 2$. Então
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$ e
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$.
Este exemplo mostra que a composição de funções não é comutativa.

Tipos de funções

Função injetora
Uma função f de A para B é **injetora** se, e somente se, $(\forall x, y \in A)\, (f(x) = f(y) \to (x = y)$.
Ou seja, se e somente se ela atribui um valor diferente para cada elemento do domínio.

Uma função injetora **preserva informação**, pois o valor de $f(x)$ determina univocamente o valor de x. Funções injetoras também são chamadas de funções **um para um**.

Exercício: Sejam f e g duas funções. Prove que se $g \circ f$ não é injetora então pelo menos uma dentre f e g não é injetora.

Função sobrejetora

Dizemos que uma função f de A para B é **sobrejetora em** B (ou é uma função de A **sobre** B) se, e somente se, $(\forall b \in B)\,(\exists a \in A)\, f(a) = b$. Ou seja, f é uma função sobre B se e somente se $B = Img(f)$. Note que não tem sentido dizer que uma função "é sobrejetora" sem especificar em qual conjunto. Por exemplo, a função f com domínio $\mathbb{Z}$ tal que $f(x) = |x|$ é tanto uma função de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ quanto de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{N}$; ela é sobrejetora em $\mathbb{N}$, mas não em $\mathbb{Z}$.

Exercício: Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$. Prove que se f é sobrejetora em B, e g é sobrejetora em C, então $g \circ f$ é sobrejetora em C.

Função bijetora

> **Definição:** Uma função f de A para B é **bijetora de** A **para** B (ou é uma **bijeção de** A **para** B) se, e somente se, f é injetora e sobrejetora em B.

Funções bijetoras são muito importantes em matemática e computação. Entre outras coisas, elas permitem definir o "tamanho" de conjuntos infinitos.

Função permutação

Uma **função permutação** de um conjunto A, ou uma **permutação** de A, é uma função bijetora de A para A. Observe que a relação de identidade sobre A é uma permutação (trivial) de A.

Exemplo: A função

$$f = \{(10, 10), (11, 12), (12, 13), (13, 11), (14, 15), (15, 14)\}$$

é uma permutação do conjunto $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Exemplo: Sejam m, n inteiros positivos quaisquer, e seja $A = \{\, x \in \mathbb{N} : x < n \,\}$. Seja $f : A \to A$ tal que $f(x)$ é o resto da divisão de $x + m$ por n. Verifica-se que f é uma permutação de A

Exercício: Liste todas as permutações do conjunto $A = \{10, 20, 30\}$.

Por ser bijetora, toda permutação de um conjunto A tem uma inversa, que também é uma permutação de A. A composição de duas permutações de A é uma permutação de A.

Uma permutação f de um conjunto A pode ser interpretada como uma maneira de colocar os elementos de A em um conjunto de caixas, cada uma rotulada com um elemento de A. Ou seja, a permutação f está dizendo que o elemento x de A está na caixa de rótulo $f(x)$. Ou, alternativamente, que a caixa de rótulo x contém o elemento $f(x)$.

Permutações são muito importantes em computação. Por exemplo, a ordenação dos elementos de uma lista de n elementos, ou dos n registros de um arquivo, pode ser vista como a aplicação de uma permutação dos índices $\{0..\,n-1\}$.

Se f é função permutação de A, todas as potências de f, positivas e negativas, são permutações de A. Nesse caso define-se também a potência nula f^0 de f como sendo a identidade sobre o domínio A.

Funções piso e teto

Definição: A **função piso** (também chamada de **chão** ou **solo**) associa a cada número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x. Este inteiro é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

Observe que $\lfloor 1/3 \rfloor = \lfloor 2/3 \rfloor = 0$, $\lfloor -1/3 \rfloor = -1$, $\lfloor -2/3 \rfloor = -1$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

Definição: A **função teto** associa a cada número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x. Este inteiro é denotado por $\lceil x \rceil$.

Observe que $\lceil 5/4 \rceil = 2$, $\lceil 7/4 \rceil = 2$, $\lceil -1/4 \rceil = 0$, $\lceil -3/4 \rceil = 0$ e $\lceil 4 \rceil = 4$

Tanto o piso quanto o teto são funções do conjunto $\mathbb{R}$ para o conjunto $\mathbb{Z}$. Essas funções tem algumas propriedades importantes:

- $\lfloor x \rfloor = n$ se, e somente se, $n \leq x < n + 1$.
- $\lfloor x \rfloor = n$ se, e somente se, $x - 1 < n \leq x$.
- $\lceil x \rceil = n$ se, e somente se, $n - 1 < x \leq n$.
- $\lceil x \rceil = n$ se, e somente se, $x \leq n < x + 1$.
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.
- $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.
- $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.

Quociente inteiro e resto

Os conceitos de divisão (quociente) e resto de um número natural x por um inteiro positivo d são conhecidos e consensuais desde a antiguidade:
17 dividido por 3 é 5 com resto 2.
O resto dessa divisão é também chamado *x módulo d*

Em matemática, a divisão inteira é indicada às vezes pelo símbolo antigo '÷', e o resto pela sigla ' mod ', ambos usados como operações entre dois inteiros. Dessa forma podemos escrever $17 \div 3 = 5$ e $17 \bmod 3 = 2$.

Estas operações podem ser definidas usando a função piso:

$$x \div d = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

$$x \bmod d = x - d(x \div d) = x - d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

$$x \div d = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

$$x \bmod d = x - d(x \div d) = x - d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

Em matemática, estas fórmulas são adotadas como definições dessas duas operações também no caso de x ser um inteiro negativo. Assim,
$(-17) \div 3 = \lfloor -17/3 \rfloor = -6$, e portanto
$(-17) \bmod 3 = (-17) - 3(-6) = 1$.

Algumas linguagens de programação modernas, como Python, usam as definições acima, embora com outros símbolos. Outras linguagens, como C e Fortran, calculam $|x| \div d$ e $|x| \bmod d$, e devolvem o resultado com o sinal de x.

Não há consenso sobre a definição de $x \div d$ ou $x \bmod d$ quando d é negativo. Felizmente, este caso raramente ocorre, na prática ou na teoria.

Exercício: O dia da semana do dia primeiro de janeiro de um ano $n \geq 1582$ pode ser determinado pela fórmula:

$$\left(n + \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{400} \right\rfloor\right) \bmod 7$$

Se o resultado for 0, o dia primeiro de janeiro cai num domingo, se for 1 numa segunda-feira, etc..

- Use essa fórmula para encontrar o dia da semana de primeiro de janeiro do ano de seu aniversário.
- Justifique esta fórmula.

Fatorial

Uma função importante em computação é o **fatorial** de um número natural n, denotado por $n!$ e definido como o produto

$$n! \;=\; \prod_{k=1}^{n} k \;=\; 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n \tag{1}$$

Por exemplo, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, etc.. Note que quando n é zero a produtória acima é vazia, portanto $0! = 1$.

Função característica

A **função característica** de uma conjunto A qualquer é uma função f cujo domínio é o conjunto universal $\mathcal{U}$,e tal que, para qualquer elemento z, $f(z)$ é um valor lógico, **V** se z pertence a A, e **F** caso contrário. Denotaremos esta função por χ_A.
Ou seja $\chi_A(z)$ tem o mesmo valor lógico que a fórmula "$z \in A$".
Podemos ver a função χ_A como uma representação do conjunto A.