# Métodos Exatos

Pedro Hokama



## Fontes

- Curso Discrete Optimization no Coursera - Prof. Dr. Pascal Van Hentenryck
- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Pesquisa Operacional, Arenales, M. N., Armentano, V. A., Morabito Neto, R., e Yanasse, H. H. (2015)
- Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Introdução à Otimização Combinatória, Flávio K. Miyazawa e Cid C. de Souza.
- Otimização Combinatória, da Carla Negri Lintzmayer do CMCC, UFABC

Qualquer erro é de minha responsabilidade.



## Programação Linear

- Já vimos vários problemas de Otimização. Caminho mínimo, Click, Mochila, AGM,...
- Em todos eles procuramos uma solução que:
  1. satisfaça certas restrições
  2. é a melhor possível, em relação a algum critério bem-definido.



- **Programação Linear** descreve uma ampla classe de problemas em que:
  1. as variáveis podem assumir valores $\mathbb{R}$
  2. as restrições são funções lineares.
  3. o critério (a função objetivo) é uma função linear.
- Acontece que um enorme número de problemas pode ser expresso desse jeito.

Uma chocolateria faz 2 tipos de chocolates. O tradicional Pyramide, e uma versão gourmet Pyramide Nuit. Quanto de cada caixa produzir para maximizar os lucros?

- Cada caixa de Pyramide gera \$1 de lucro.
- Cada caixa de Nuit gera \$6 de lucro.

Sabemos que conseguimos vender

- no máximo 200 caixas de Pyramide.
- no máximo 300 caixas de Nuit.

Além disso, dada a força de trabalho atual

- podemos produzir no máximo 400 caixas de chocolate.



Vamos chamar de

- $x_1$ a quantidade de caixas de Pyramide, e
- $x_2$ a quantidade de Nuit a serem produzidas.

O que sabemos sobre cada uma dessas quantidades?

- no máximo 200 caixas de Pyramide

$$x_1 \leq 200$$

- no máximo 300 caixas de Nuit

$$x_2 \leq 300$$



- $x_1$ a quantidade de caixas de Pyramide, e
- $x_2$ a quantidade de Nuit a serem produzidas.

Limite de produção:

- podemos produzir no máximo 400 caixas de chocolate.

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

Além disso não é possível produzir quantidades negativas.

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



- $x_1$ a quantidade de caixas de Pyramide, e
- $x_2$ a quantidade de Nuit a serem produzidas.

Qual será o lucro total?

- Cada caixa de Pyramide gera \$1 de lucro.
- Cada caixa de Nuit gera \$6 de lucro.

$$x_1 + 6x_2$$

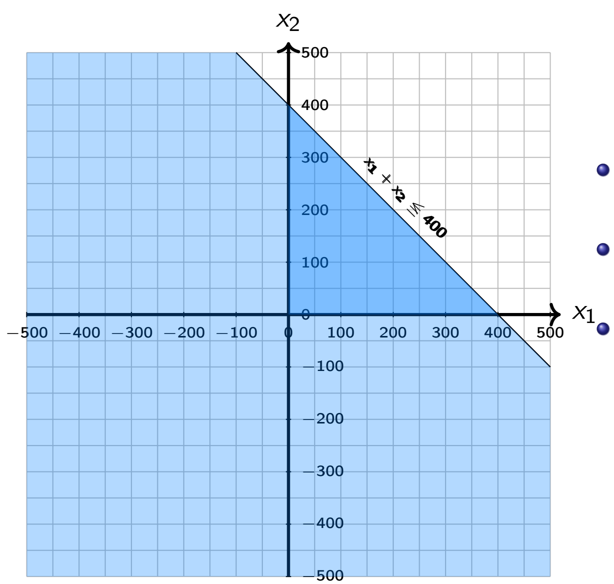
Podemos então escrever o seguinte **Programa Linear** que representa esse problema:

$$
\begin{array}{rrl}
\text{maximizar} & x_1 + 6x_2 & \\
\text{sujeito a} & x_1 & \le 200 \\
 & x_2 & \le 300 \\
 & x_1 + x_2 & \le 400 \\
 & x_1 & \ge 0 \\
 & x_2 & \ge 0
\end{array}
$$



- Uma interpretação geométrica.



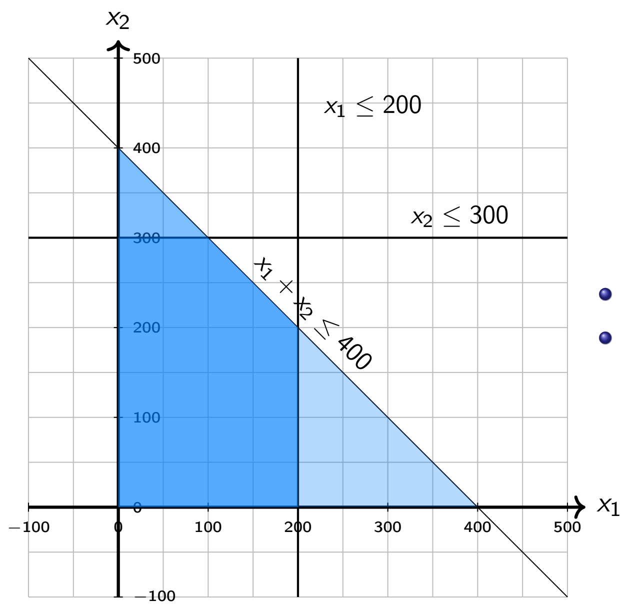



- o que significa $x_1 + x_2 = 400$
- o que significa $x_1 + x_2 \le 400$
- o que significa

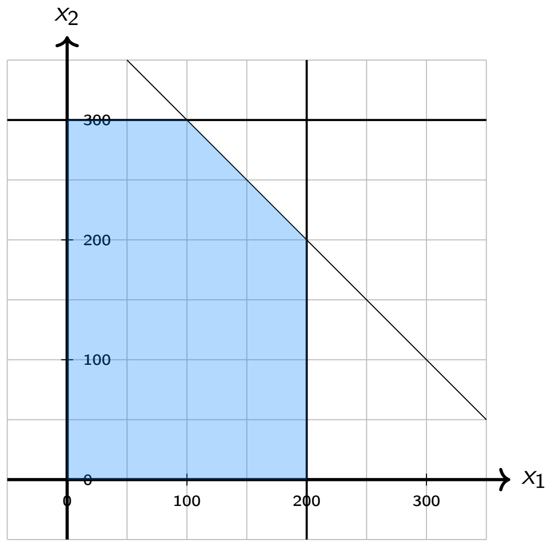
$x_1 \ge 0$ e

$x_2 \ge 0$






- $x_1 \le 200$
- $x_2 \le 300$




maximizar

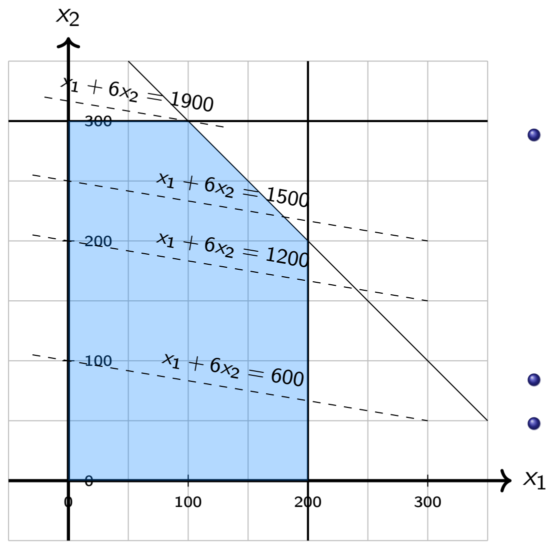
$$x_1 + 6x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 200 \\ x_2 &\leq 300 \\ x_1 + x_2 &\leq 400 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Onde será que está a solução ótima?






- Será que conseguimos uma solução de \$600? Ou seja,

$$x_1 + 6x_2 = 600$$

- $x_1 + 6x_2 = 1200$
- $x_1 + 6x_2 = 1500$

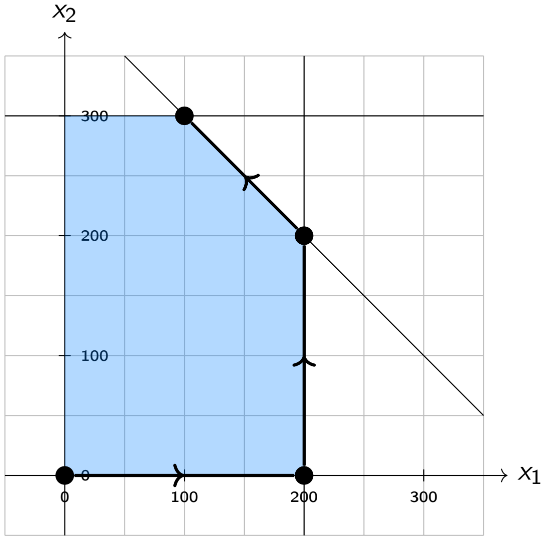


- É uma regra geral de programas lineares que sempre existe pelo menos um vértice da região factível que tem uma solução ótima. Exceto quando o ótimo não existe que pode acontecer quando:
  - O programa é infactível.
  - A solução é ilimitadamente boa.



Resolvendo Programas Lineares

- Aproveitando-se do fato de uma solução ótima estar em um vértice. O algoritmo simplex encontra uma solução ótima com a seguinte estratégia:
  1. Comece de um vértice inicial qualquer da solução viável.
  2. Observe os vértices vizinhos.
  3. Se algum vértice for melhor, mova-se para esse vértice e repita.
  4. Senão, se nenhum vértice for melhor, já está na solução ótima.





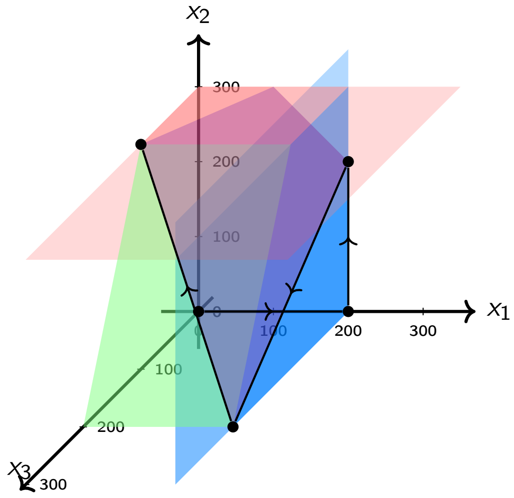

**Mais Produtos**

- A chocolateria decide adicionar ao Pyramide e ao Pyramide Nuit, um novo produto ainda mais luxuoso o Pyramide **Luxe**.
- Cada caixa do Luxe dá um lucro de \$13.
- As antigas restrições ainda valem (e agora $x_3$ também conta no limite de 400 caixas)
- Além disso, Nuit e Luxe usam o mesmo tipo de embalagem, mas enquanto Nuit usa 1, Luxe usa 3. E a chocolateria tem apenas 600 dessas embalagens disponíveis.



$$
\begin{array}{rrl}
\text{maximizar} & x_1 + 6x_2 + 13x_3 & \\
\text{sujeito a} & x_1 & \leq 200 \\
 & x_2 & \leq 300 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & \leq 400 \\
 & x_2 + 3x_3 & \leq 600 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$






- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
- $x_1 \leq 200$
- $x_2 \leq 300$
- $x_2 + 3x_3 \leq 600$
- $x_1 + x_2 + x_3 \leq 400$
- ótimo:

$$
\begin{aligned}
0 + 6 \cdot 300 + 13 \cdot 100 \\
= 3100
\end{aligned}
$$

- A região factível de um PL é chamado de poliedro.
- Como podemos mostrar que de fato $(0, 300, 100)$ é uma solução ótima?
- Observe que a solução deve obedecer a desigualdade:

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &\leq 600 \quad (x4) \\ 4x_2 + 12x_3 &\leq 2400 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{ccccccc} & & 4x_2 & + & 12x_3 & \leq 2400 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 400 \\ & & x_2 & & & \leq 300 \\ \hline x_1 & + & 6x_2 & + & 13x_3 & \leq 3100 \end{array}$$

Mas $x_1 + 6x_2 + 13x_3$ é justamente a função objetivo. Então essa desigualdade que é respeitada por qualquer solução nos diz que nenhuma solução vai ter lucro maior que 3100, como já encontramos uma solução $(0, 300, 100)$ com lucro 3100 ela com certeza é ótima.



- É possível resolver um outro Programa Linear que irá encontrar esse valor.
- Esse outro PL está intimamente ligado ao PL original e se chama Dual.
- Podemos ter Programas Lineares com 4, 5 ou centenas de variáveis. Nesses casos já não é tão fácil desenhar o poliedro, mas o principio geral é o mesmo.